



# Propagation d'ondes sonores dans des empilements granulaires non-cohésifs

Guillaume Huillard

## ► To cite this version:

Guillaume Huillard. Propagation d'ondes sonores dans des empilements granulaires non-cohésifs. Matière Molle [cond-mat.soft]. Université Nice Sophia Antipolis, 2011. Français. NNT: . tel-00664150

**HAL Id: tel-00664150**

**<https://theses.hal.science/tel-00664150>**

Submitted on 29 Jan 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

préparée au

**Laboratoire de Physique de la Matière Condensée**

pour obtenir le titre de

**Docteur en Sciences**

de l'Université de Nice-Sophia Antipolis

Discipline : **Physique**

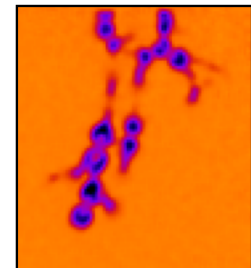
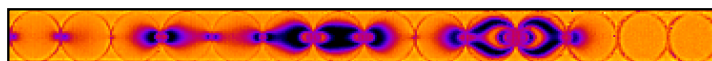
présentée par

**Guillaume HUILLARD**

## **Propagation d'ondes sonores dans des empilements**

### **granulaires non-cohésifs**

Visualisation par photoélasticité



Soutenue le 18 novembre 2011 devant le jury composé de :

<b>Sergio CILIBERTO</b>	DR CNRS	ENS de Lyon	Président
<b>Christophe COSTE</b>	MC	Université Paris Diderot	Rapporteur
<b>Xiaoping JIA</b>	Professeur	Université Marne la Vallée	Rapporteur
<b>Stéphane JOB</b>	MC	Supméca Paris	Examineur
<b>Xavier NOBLIN</b>	CR CNRS	Université de Nice	Co-Directeur
<b>Fahrang RADJAI</b>	DR CNRS	Université Montpellier 2	Examineur
<b>Jean RAJCHENBACH</b>	DR CNRS	Université de Nice	Directeur



*A ma Maman, mes soeurs,  
et bien sûr Rebecca,  
ainsi qu'une pensée pour Serge...*





« The next day, Monday, we were playing in the fields and this boy said to me, “See that bird standing on the stump there? What’s the name of it?”

I said, “I haven’t got the slightest idea.”

He said, “It’s a brown-throated thrush. Your father doesn’t teach you much about science.”

I smiled to myself, because my father had already taught me that the name doesn’t tell me anything about the bird.

He taught me “See that bird? It’s a brown-throated thrush, but in Germany it’s called a halsenflugel, and in Chinese they call it a chung ling and even if you know all those names for it, you still know nothing about the bird. You only know something about people : what they call that bird. Now that thrush sings, and teaches its young to fly, and flies so many miles away during the summer across the country, and nobody knows how it finds its way,” and so forth.

There is a difference between the name of the thing and what goes on.

The result of this is that I cannot remember anybody’s name, and when people discuss physics with me they often are exasperated when they say “the Fitz-Cronin effect” and I ask “What is the effect?” and I can’t remember the name.

I would like to say a word or two – may I interrupt my little tale – about words and definitions, because it is necessary to learn the words. It is not science. That doesn’t mean, just because it is not science, that we don’t have to teach the words. We are not talking about what to teach; we are talking about what science is. It is not science to know how to change Centigrade to Fahrenheit. It’s necessary, but it is not exactly science. In the same sense, if you were discussing what art is, you wouldn’t say art is the knowledge of the fact that a 3-B pencil is softer than a 2-H pencil. It’s a distinct difference. That doesn’t mean an art teacher shouldn’t teach that, or that an artist gets along very well if he doesn’t know that. (Actually, you can find out in a minute by trying it; but that’s a scientific way that art teachers may not think of explaining.)

In order to talk to each other, we have to have words, and that’s all right. It’s a good idea to try to see the difference, and it’s a good idea to know when we are teaching the tools of science, such as words, and when we are teaching science itself. »

RICHARD FEYNMAN

*The Physics Teacher* **7**, issue 6, pp. 313-320 (1969)



# Remerciements

Je tiens, au travers de ces quelques lignes, à remercier quelques personnes qui ont fait, chacune à leur manière, de près ou de loin, que cette thèse est ce qu'elle est et pas autre chose !

Je précise que dans les mille mots qui composent cette section, les termes « remerciements », « merci » et « je remercie » seront utilisés une quinzaine de fois, soit une fois tous les soixante-cinq mots, ce qui fait en moyenne une fois toutes les quatre lignes...

Je souhaite d'abord témoigner de ma reconnaissance aux membres de mon jury. Je remercie SERGIO CILIBERTO d'avoir présidé ce jury et de m'avoir initié à la recherche au cours de stages de M1 et M2, CHRISTOPHE COSTE et XIAOPING JIA d'avoir accepté de rapporter ce manuscrit ainsi que STÉPHANE JOB et FAHRANG RADJAI d'en avoir été les examinateurs. Mes deux directeurs, JEAN RAJCHENBACH et XAVIER NOBLIN, complétaient ce jury. Je veux ici les remercier de m'avoir proposé ce sujet passionnant voilà plus de quatre ans et de m'avoir fait confiance. En particulier un grand merci à Xavier qui, durant ces trois années, m'a fait partager l'étendue de ses connaissances<sup>1</sup>. De plus il m'a toujours donné des conseils sensés, et cela pas uniquement que sur le plan scientifique.

J'adresse mes remerciements sincères aux deux directeurs du LPMC qui se sont succédés durant ma thèse : GÉRARD MONNON<sup>2</sup> et FABRICE MORTESSAGNE<sup>3</sup>. Vous participez, en tant que directeurs, à créer une ambiance conviviale entre tout le personnel et propice au travail. A ce propos, je remercie grandement la cellule administrative et technique : CHRISTINE UBALDI, DENISE SIEDLER, NATHALIE KOULECHOFF, CHRISTINE BOUDARD-MORTEAU et BERNARD GAY-PARA. Vos compétences respectives nous font gagner beaucoup de temps quand on fait appel à vous (toujours dans l'urgence, bien sûr) en ayant toujours le sourire et en faisant preuve de bonne humeur. J'associe à ces remerciements MICHÈLE UDE à qui je souhaite bon rétablissement.

Je voudrais particulièrement remercier JEAN-PIERRE ROMAGNAN. Tu es un des premiers à être venu m'accueillir à mon arrivée et par suite, je n'ai cessé d'apprécier les innombrables

---

1. Je sais désormais que Michel Platini est né un 21 juin, Zidane un 23 juin et Xavier le 22 juin !

2. Pour m'avoir accueilli au laboratoire en début de thèse.

3. Pour ne pas m'avoir mis dehors une fois ma thèse achevée (!) et pour me donner, actuellement, la possibilité de continuer mon travail encore quelques mois.

---

discussions que l'on a pu avoir. Un grand merci pour m'avoir fait confiance en me donnant la responsabilité d'un groupe de TD, un autre merci pour ta patience et ta disponibilité quand je venais discuter dans ton bureau, et encore un autre pour la considération que tu nous montres à nous, doctorants. Te dire que tu n'es pas étranger à mon souhait de faire de l'enseignement. Je te souhaite une excellente retraite. A propos d'enseignement, je salue également OLIVIER LEGRAND, CHRISTIAN BRACCO et DIDIER ORLANDI avec qui j'ai et je vais continuer de travailler.

J'ai également une pensée sincère pour ANDRÉ AUDOLY et RICHARD KOFFMAN, tous deux disparus à l'été 2011, avec qui j'ai interagi et discuté à de multiples reprises au cours de ces trois années de thèse.

J'en viens à remercier ceux et celles qui m'ont fait répéter mon oral de soutenance : en plus de Jean et Xavier, il y a eu Valérie D., Jean-Pierre, Fabrice et Christophe. Merci de votre disponibilité à cet instant et des conseils que vous m'avez donnés et que j'ai suivis pour la plupart. Merci également au personnel des ateliers mécaniques et électroniques sans qui un travail expérimental ne verrait pas le jour : Frédéric L., Christophe P., Grégory S., Frédéric J. et Jérôme M..

Dans une journée typique de thésard, hormis le travail acharné, il y a aussi des discussions extra-scientifiques, des cafés, des pauses, les déjeuners... Tous ces moments ont été agréablement partagé avec nombre d'entre vous. Je tiens à remercier Christophe R. pour ses gâteaux, ses innombrables invitations à dîner, et ses conseils toujours avisés. Franck (encore appelé M. Celeste) dont l'humour n'est pas reconnu à sa juste valeur (c'est quoi déjà la blague sur les curés?!). Par contre, une chose qui est reconnue à sa juste valeur, c'est son agressivité lors de tacles glissés sur Xavier au foot! Mais je ne dirai rien de plus qui puisse mettre ma personne en danger. Enfin, je ne saurai oublier (et pourtant je l'ai fait le jour de ma soutenance) Lolo Labonte pour son extrême gentillesse et ses conseils toujours réfléchis. J'espère que tes projets pourront se réaliser dans un avenir proche et que tu gagneras à l'Euromillion. Le dernier habitué des déjeuners dans le patio est Wilfried que je tiens plus que quiconque à remercier pour nous avoir fait découvrir le vin du Bugey! Oups, j'en fais peut-être un peu trop...

J'en arrive aux doctorants-Ater-MdC stagiaire! Tout d'abord le bureau 2.22, Olivier, Valérie M. et Amandine (il ne serait pas raisonnable de mettre ici leurs surnoms) avec qui j'ai passé la majeure partie de mes pauses, qui ont eu l'extrême privilège (n'est-ce pas?)

---

---

de bénéficier de mon humour de haute volée et avec qui on a inventé un nouveau concept sportif : le “foot-bureau”. Une autre de mes victimes a été Florence que j’ai peu épargnée, à son grand désarroi. Florence partie, il lui fallait une remplaçante ; c’est chose faite avec le retour de Claire “Mikel” que je me fais un plaisir d’effrayer dans son bureau (lorsque Jean-Pierre n’est pas là, cela va de soi). Et puis il y a la dernière venue, Yasmine, qui est devenue mon nouveau fournisseur officiel de bonbons (et dans le même bureau, Jean-Bernard m’offre la café !) après que Valérie se soit énervée (paraît-il que je lui en piquais trop !). Pour l’instant, Yasmine n’ose rien dire...

Je salue aussi mes deux co-bureaux, Fred et Talib et leur souhaite le meilleur pour leur avenir respectif. J’en profite également pour adresser un merci à ELISABETH LEMAIRE et FRANÇOIS PETERS qui se retrouvaient souvent dans notre bureau et dont la bonne humeur était communicative...sauf une fois, c’est bien ça ? !

Enfin je remercie ma Maman grâce à qui j’en suis arrivé là, puis mes soeurs et la famille Théry qui ont fait le déplacement. Naturellement, je te remercie toi aussi, Rebecca, qui est à mes côtés au quotidien et qui m’a supporté et encouragé durant ces trois années de thèse. Et pour tout le reste aussi, merci...

Je terminerai en ayant une pensée pour Serge, qui aimait à me demander quand je finirai à jouer avec des petits cailloux pour faire un vrai travail...

---



# Table des matières

<b>Plan du manuscrit</b>	<b>1</b>
<b>I Généralités sur les empilements granulaires</b>	<b>5</b>
I.1 Définition et exemples de milieux granulaires . . . . .	6
I.2 Le transport d’ondes sonores dans les empilements granulaires . . . . .	8
I.3 Approche simplificatrice au laboratoire . . . . .	10
I.4 Le désordre de l’empilement . . . . .	11
I.5 La non-linéarité du contact de Hertz . . . . .	14
I.5.1 Considération géométrique du contact . . . . .	16
I.5.2 Détermination <i>a priori</i> des paramètres du contact de Hertz . . . . .	18
I.5.3 Résolution du contact de Hertz . . . . .	20
<b>II Ondes sonores dans des empilements granulaires. Etat de l’art.</b>	<b>23</b>
II.1 Ondes sonores dans une chaîne unidimensionnelle de sphères . . . . .	24
II.1.1 Le modèle de la chaîne de masses-ressorts . . . . .	24
II.1.2 Régime linéaire . . . . .	25
II.1.2.1 Modèle théorique . . . . .	25
II.1.2.2 Résultats expérimentaux sur le régime linéaire . . . . .	27
II.1.3 Régime faiblement non-linéaire . . . . .	30
II.1.4 Régime fortement non-linéaire . . . . .	31



---

II.1.4.1	Le modèle théorique . . . . .	31
II.1.4.2	Résultats expérimentaux . . . . .	38
II.2	Ondes sonores dans des empilements bi- et tridimensionnels . . . . .	42
II.2.1	Théorie des milieux effectifs . . . . .	42
II.2.2	Activation des contacts . . . . .	44
II.2.3	Origine physique de l'activation des contacts . . . . .	49
II.2.4	Diffusion multiple des ondes élastiques dans les milieux granulaires .	50
II.2.5	Ondes élastiques de rotation . . . . .	52
II.3	L'originalité de notre approche . . . . .	52
<b>III</b>	<b>Les grains cylindriques : loi de contact et calibration photoélastique</b>	<b>55</b>
III.1	Le contact entre des cylindres . . . . .	56
III.1.1	Détermination <i>a priori</i> des paramètres du contact . . . . .	56
III.1.2	Compressibilité de deux cylindres en contact le long d'une génératrice commune . . . . .	57
III.1.3	Un modèle de compression d'un cylindre . . . . .	60
III.2	Fabrication des grains cylindriques . . . . .	62
III.3	Mesure des lois « $F - S$ » et « $F - \delta$ » pour des cylindres . . . . .	66
III.3.1	Le dispositif expérimental . . . . .	66
III.3.2	Relation expérimentale « $F_0 - S$ » . . . . .	68
III.3.3	Relation expérimentale « $F_0 - \delta$ » . . . . .	72
III.3.4	Résumé . . . . .	77
III.4	La photoélasticité . . . . .	78
III.5	La calibration photoélastique . . . . .	81
<b>IV</b>	<b>Ondes sonores en régime linéaire dans une chaîne unidimensionnelle de cylindres</b>	<b>87</b>
IV.1	Dispositif expérimental . . . . .	88

---

---

IV.1.1 Le dispositif . . . . .	88
IV.1.2 Le protocole . . . . .	90
IV.1.3 Le traitement d'images . . . . .	92
IV.2 Propagation de l'onde sonore en régime linéaire . . . . .	93
IV.2.1 Le modèle de masses et de ressorts . . . . .	94
IV.2.2 Propriétés de l'onde . . . . .	95
IV.2.3 La vitesse des ondes en régime linéaire . . . . .	98
IV.3 Essais sur d'autres types de grains . . . . .	102
IV.3.1 Chaîne unidimensionnelle de cylindres en acier . . . . .	102
IV.3.2 Chaîne unidimensionnelle de parallélépipèdes . . . . .	104
IV.4 La dissipation . . . . .	106
IV.5 Résumé des résultats obtenus . . . . .	109
<b>V Ondes sonores en régime non-linéaire dans une chaîne unidimensionnelle de cylindres</b>	<b>115</b>
V.1 Ondes de moyenne amplitude . . . . .	116
V.2 Ondes de grandes amplitudes . . . . .	119
V.2.1 Dispositif . . . . .	119
V.2.2 Exemple et visualisation de l'onde produite . . . . .	120
V.3 Traitement d'images . . . . .	122
V.3.1 Mesure de l'amplitude $F_m$ de l'onde . . . . .	122
V.3.2 Suivi du profil de l'onde . . . . .	125
V.4 Résultats . . . . .	127
V.4.1 Profil de l'excitation . . . . .	127
V.4.2 Vitesse des ondes en régime non-linéaire . . . . .	131
V.4.3 Détermination de la vitesse $V$ des ondes solitaires pour une loi de puissance du type $F = A_\alpha \delta^\alpha$ . . . . .	133

---

---

V.5 Conclusion . . . . .	136
<b>VI Ondes sonores en régime linéaire dans un empilement bidimensionnel de cylindres</b>	<b>139</b>
VI.1 Dispositif expérimental . . . . .	140
VI.2 Trajet des ondes et traitement d'images . . . . .	142
VI.2.1 Trajet des ondes linéaires . . . . .	142
VI.2.2 Traitement d'images . . . . .	144
VI.2.2.1 Force moyenne le long d'une chaîne de force . . . . .	144
VI.2.2.2 Suivi de l'onde . . . . .	145
VI.3 Vitesse des ondes dans un empilement bidimensionnel . . . . .	148
VI.3.1 Détermination de la vitesse et incertitudes . . . . .	148
VI.3.2 Résultats pour un empilement avec un arrangement hexagonal . . . . .	152
VI.3.3 Résultats pour un empilement avec un arrangement carré . . . . .	152
VI.4 Résumé et discussion . . . . .	156
VI.5 Perspectives . . . . .	158
<b>Conclusion générale</b>	<b>165</b>
<b>A Les polariscopes</b>	<b>169</b>
A.1 Le polariscope plan . . . . .	169
A.2 Le polariscope circulaire . . . . .	170
<b>B Un modèle de compression d'un cylindre</b>	<b>175</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>177</b>

---

# Plan du manuscrit

Cette thèse est consacrée à l'étude de la propagation d'ondes sonores dans une assemblée de grains. Dans ces milieux, une onde se propage de grains en grains par les contacts existant entre eux et ceux-ci sont responsables des comportements originaux et mal-élucidés présentés par les ondes sonores. Trois ingrédients caractéristiques de ces milieux sont responsables de ces comportements étonnants : la non-linéarité de la loi de contact entre les grains, la non-cohésivité de l'empilement pour les granulaires *secs* et le désordre du réseau des contacts.

Notre approche est originale et novatrice car nous utilisons des grains photoélastiques. Cette technique expérimentale est souvent employée pour l'étude des milieux granulaires mais en *statique*. Ici nous l'utilisons en *dynamique*. Couplés à une caméra rapide (typiquement 100000 images/seconde), cela nous permet de visualiser la propagation de l'onde en tous points du système. Pour mettre en oeuvre cette méthode, nous utilisons des grains de formes cylindriques et non pas sphériques comme dans la plupart des études antérieures. Cela permet en plus de tester une autre loi de contact et de voir comment se transposent les résultats obtenus avec des sphères.

Ce sujet est un thème récent au laboratoire qui a commencé juste avant le début de ma thèse. Durant celle-ci, mon travail a consisté à concevoir et à monter les dispositifs expérimentaux, à effectuer des expériences et à procéder au traitement d'images pour obtenir des informations quantitatives à partir des images photoélastiques. J'ai essentiellement travaillé sur trois expériences qui font l'objet des Chapitres IV-V-VI. Je détaille ci-après le plan de mon manuscrit de thèse.

**Chapitre I.** Dans ce chapitre introductif, je définis le terme de milieu granulaire et en donne des exemples tirés de la vie quotidienne. Je présente ensuite une expérience illustrant le comportement étonnant des milieux granulaires vis-à-vis de la propagation des ondes sonores. Enfin, je discute brièvement des caractéristiques essentielles de ces milieux quant à la propagation d'ondes élastiques : le désordre du réseau des contacts et la non-linéarité de

la loi de contact entre les grains.

**Chapitre II.** Ce deuxième chapitre présente un état de l'art relatif à la propagation d'ondes sonores dans une assemblée de grains. Je rappelle d'abord le cas d'une chaîne unidimensionnelle de sphères en contact de Hertz. Cette chaîne est modélisée par une association de masses et de ressorts non-linéaires. Divers types de solutions doivent être envisagées suivant que l'on considère les ondes de déformation en régime linéaire, en régime faiblement non-linéaire et enfin en régime fortement non-linéaire. Dans ce dernier cas, il existe un type particulier d'ondes solitaires prédites initialement par Nesterenko. Les résultats de son analyse sont confrontés aux résultats expérimentaux.

Ensuite, je décris les résultats obtenus sur la propagation d'ondes dans des empilements bi- et tridimensionnels pour lesquels le désordre du réseau de contact va intervenir.

**Chapitre III.** Je présente dans cette partie les grains utilisées dans nos expériences ainsi que la méthode de traitement des images photoélastiques. Il s'agit de grains cylindriques photoélastiques usinés à l'atelier mécanique du laboratoire. Tout d'abord je présente une généralisation de la loi de Hertz pour un contact entre des grains cylindriques. On compare ensuite les prédictions de ce modèle aux paramètres du contact accessibles expérimentalement. Après avoir rappelé les principes de la photoélasticité, je présente le protocole de traitement d'images que j'ai mis au point pour déduire la force qui agit sur un grain à partir de son image photoélastique.

**Chapitre IV.** Ce chapitre est le premier de trois chapitres à présenter nos résultats expérimentaux concernant la propagation d'ondes sonores dans une assemblée de grains. Il s'agit ici d'une chaîne unidimensionnelle de grains cylindriques, non-cohésifs et photoélastiques. Les ondes sont de faibles amplitudes comparées à la force statique de confinement, de telle sorte que l'on puisse se placer dans l'approximation linéaire des équations de propagation. On visualise le champ de déformation correspondant à la propagation de l'onde à l'aide de la caméra rapide. On analyse le lien entre la vitesse de ces ondes acoustiques et la force de confinement statique. On observe deux régimes différents que l'on peut décrire par deux lois de puissance. Les données expérimentales sont comparées à un modèle de masses et de ressorts qui vérifient la loi de contact propre aux cylindres. Aux faibles forces, l'écart à la prédiction théorique est interprétée comme étant due à la fois à la rugosité des surfaces en contact et aux imperfections de la forme des grains. Le même type de comportement est retrouvé pour des cylindres en acier et des grains parallélépipédiques en polycarbonate. Enfin, on étudie la dissipation qui a lieu au cours de la propagation. Nos données sur la dissipation

---

suggère que celle-ci est essentiellement due au frottement solide.

**Chapitre V.** Dans cette partie, on utilise toujours la chaîne unidimensionnelle de grains cylindriques mais on s'intéresse ici à la propagation d'ondes de forte amplitude, en régime non-linéaire. On observe différents profils spatiaux de l'onde en fonction de la valeur de la force statique de confinement. Pour des faibles valeurs de celle-ci, le pulse initial se décompose très rapidement en une série de pics d'amplitudes décroissantes qui se propagent à des vitesses différentes. La taille de ces pics correspond à environ 3 – 4 grains. On a ensuite étudié comment évolue la vitesse du front d'onde ascendant en fonction de l'amplitude de l'onde. On conclue ce chapitre en généralisant l'analyse de Nesterenko pour une loi de contact du type  $F \propto \delta^\alpha$  et compare alors les prédictions avec nos données. L'accord est très bon sans aucun paramètre ajustable.

**Chapitre VI.** Dans ce dernier chapitre, on s'intéresse à l'effet de la dimensionalité de l'empilement sur les propriétés de la propagation. On utilise un empilement bidimensionnel ordonné de cylindres. On s'intéresse à la propagation d'ondes de faible amplitude, en régime linéaire, dans ce système 2D. On constate que les ondes de petites amplitudes se propagent dans les chaînes de forces statiques. On a mesuré la force et la vitesse des ondes le long de ces chaînes de force. Nous avons trouvé que la vitesse augmente lorsque la force statique dans la chaîne augmente, mais on note cependant une grande dispersion des mesures entre les différentes chaînes. On compare ensuite ces résultats à ceux obtenus pour la chaîne 1D.

---



# Chapitre I

## Généralités sur les empilements granulaires

### Sommaire

---

I.1	Définition et exemples de milieux granulaires . . . . .	6
I.2	Le transport d'ondes sonores dans les empilements granulaires	8
I.3	Approche simplificatrice au laboratoire . . . . .	10
I.4	Le désordre de l'empilement . . . . .	11
I.5	La non-linéarité du contact de Hertz . . . . .	14
I.5.1	Considération géométrique du contact . . . . .	16
I.5.2	Détermination <i>a priori</i> des paramètres du contact de Hertz . . . .	18
I.5.3	Résolution du contact de Hertz . . . . .	20

---



## I.1 Définition et exemples de milieux granulaires

Quelle différence y a-t-il entre une dune de sable et une poignée de céréales, entre des médicaments sous forme de pilules et le ballast des voies ferrées, entre un tas de sucre et les anneaux de Saturne ? Pour le physicien, il y a très peu de différences ; tous ces « objets » ont la particularité commune d'être constitués d'un très grand nombre de « particules » solides, indépendantes et macroscopiques. Ceci leur confèrent des propriétés physiques semblables qui ne dépendent pas de la nature et de la géométrie exacte des grains. De ce fait, on classe tous ces matériaux dans la famille des *matériaux granulaires*. Les propriétés présentées par ces matériaux les distinguent des solides et des liquides [1, 2, 3]. Le lecteur pourra se référer à un livre récent [4] pour découvrir différents aspects relatifs aux granulaires.

Les *matériaux granulaires* sont omniprésents dans notre quotidien (Fig. I.1). On les rencontre dans le milieu naturel : ceux-ci donnent lieu à des phénomènes d'avalanches [5, 6], de glissements de terrain [7, 8, 9], d'éboulements, d'érosion des dunes de sables [10]. Ils sont également présents dans les secteurs industriels tels que l'agroalimentaire, le bâtiment, le génie civil, les industries chimiques et pharmaceutiques.

Dans cette thèse, on appellera *matériaux granulaires* ou *milieux granulaires* une collection de particules solides, indépendantes et dont la taille de chaque constituant est supérieure à  $100\ \mu\text{m}$ . Pour les constituants dont la taille est comprise entre  $1\ \mu\text{m}$  et  $100\ \mu\text{m}$ , on parlera plutôt de *poudres* [11, 12]. Cette distinction réside dans le fait que ce ne sont pas les mêmes interactions qui interviennent entre les grains. Dans les deux cas, la borne inférieure sur la taille des constituants assure que ceux-ci sont insensibles à l'agitation thermique. Comparons pour cela l'énergie thermique à température ambiante et l'énergie typique pour déplacer un grain d'une hauteur verticale égale à son diamètre  $d$ . Nous souhaitons avoir  $k_B T \ll mgd$ , soit  $d \gg (k_B T / \rho g)^{1/4}$ , où  $\rho$  est la masse volumique. En prenant une masse volumique typique  $\rho \propto 5\ \text{g/cm}^3$ , on trouve  $d \gg 0.1\ \mu\text{m}$ . A partir de quelques micromètres, les particules sont non-Browniennes. Dans le reste de cette thèse, nous considérerons uniquement des milieux granulaires *secs*. Ce qualificatif signifie qu'il n'y a pas de liquide entre les grains, ce qui changerait les propriétés de cohésion du milieu<sup>1</sup>. Notamment, les granulaires *secs* ne résistent pas à la traction. On parlera donc de *milieux granulaires non-cohésifs*, où les seules interactions entre les grains seront les interactions de contact de non-interpénétration et de

---

1. Quiconque a déjà construit un château de sable sur la plage sait que la présence d'un fluide apporte une cohésion plus importante au milieu [13], [14], [15], [16].

---



**FIG. I.1** – Exemples de matériaux granulaires. On rencontre ces matériaux en milieu naturel (dunes de sable, châteaux de sable, éboulement) et dans le secteur industriel (agroalimentaire, pharmaceutique, bâtiment).

frottement solide.

Malgré l'omniprésence de cette classe de matériaux et l'importance des phénomènes où ceux-ci interviennent, nos connaissances sur leur comportement sont limitées et leur description est souvent phénoménologique. Nous ne possédons pas encore, contrairement au cas des solides et des fluides, de théorie ou d'équation constitutive qui permette de rendre compte de tous les comportements observés. Et pourtant, la physique des milieux granulaires a suscité un intérêt depuis plusieurs siècles chez d'illustres physiciens et ingénieurs (se référer à [1] et [11] pour un aspect historique). Voici les difficultés que l'on rencontre pour décrire ces systèmes : ils sont constitués d'un très grand nombre de particules, il s'agit de systèmes hors-équilibre, plusieurs échelles spatiales caractéristiques apparaissent, les lois de contact

sont non-linéaires, les collisions entre les grains sont dissipatives et la loi de frottement solide de Coulomb soulève bien des paradoxes...

Depuis une trentaine d'années, l'étude de la matière granulaire a connu un regain d'intérêt, motivée par les applications industrielles et géophysiques, mais également par la richesse des comportements observés qui pose des questions fondamentales nouvelles ([1], [2]).

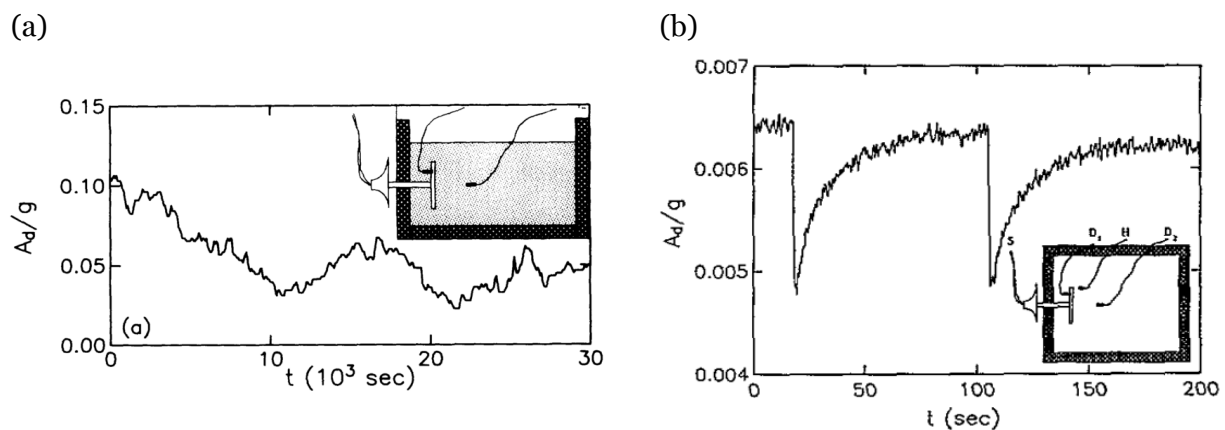
## I.2 Le transport d'ondes sonores dans les empilements granulaires

Un pan des recherches sur les milieux granulaires concernent les phénomènes de transport au sein de ces matériaux. On peut citer le transport de chaleur [17], la conduction électrique [18, 19, 20, 21, 22, 23] et la propagation d'ondes sonores. C'est sur ce dernier point que porte mon travail de thèse.

Une onde acoustique se propage dans un milieu granulaire en passant d'un grain à un autre via le contact entre les deux grains. C'est donc ce contact qui va contrôler la propagation de l'onde et le comportement du son dans ces milieux. Trois ingrédients sont essentiellement responsables de la richesse des comportements présentés par les ondes sonores dans ces milieux. Il s'agit d'abord de la *non-linéarité* et du caractère *unilatéral* de la loi de contact entre les grains. Par exemple pour des grains sphériques, la loi de contact est connue sous le nom de *loi de Hertz* [24, 25]. Cette loi prévoit une dépendance en loi de puissance  $3/2$  entre la déformation des grains et la force appliquée. On discutera en détails cette loi de contact au § I.5. Deuxièmement, c'est le caractère *désordonné* du réseau des contacts qui rend complexe la propagation de l'onde. En effet, même si tous les grains de l'empilement sont similaires et leurs centres disposés suivant un réseau parfaitement ordonné, un léger défaut de rugosité, de forme ou de taille peut induire que des grains voisins ne se touchent pas. Le réseau des contacts est alors désordonné [26]. Une force extérieure appliquée se répartira suivant un réseau de grains porteurs d'aspect filamentaire appelés *chaînes de forces*, où un petit nombre de contacts supportera la majeure partie de la force. On discutera les propriétés de ces chaînes de forces au § I.4. La propagation d'une onde acoustique dans un milieu granulaire se ramène donc à un problème de propagation d'ondes dans un milieu désordonné et non-linéaire.

Le phénomène de transport des ondes de déformation dans ces matériaux a des enjeux

---



**FIG. I.2** – *Extrême sensibilité de l'onde à l'arrangement précis de chacun des grains de l'empilement. (a) : Signal mesuré par un détecteur de la taille d'un grain dans un empilement de billes de verre de diamètre 5 mm (la dimension de l'empilement est  $28\text{ cm} \times 28\text{ cm}$  et de hauteur comprise entre 8 et 15 cm). L'excitation a une accélération de  $1.4\text{ g}$  et une fréquence de  $4\text{ kHz}$ . Le passage de l'onde induit de très légers déplacements à l'échelle du grain mais suffisamment importants à l'échelle du contact pour modifier le réseau des contacts. Les fluctuations du signal traduisent les variations des chemins empruntés par l'onde sonore. Tiré de Liu et Nagel [27]. (b) : Idem mais pour des paramètres de la source valant  $0.14\text{ g}$  et  $6.4\text{ kHz}$ . L'amplitude de la source n'est pas suffisante pour provoquer des variations aussi importantes que dans le cas précédent. Toutes les 80 s, un courant passe dans une résistance chauffante de la taille d'un grain enfouie dans l'empilement. L'augmentation de température de  $1\text{ K}$  cause la dilatation du grain sur quelques microns ce qui modifie la réponse du détecteur de 25%. Tiré de Liu et Nagel [28].*

importants dans le secteur industriel, en géophysique (sismologie) et aussi pour la recherche fondamentale (propagation d'ondes dans un milieu non-linéaire et désordonné). De plus, l'utilisation de ces ondes est une des rares méthodes dont on dispose pour aller sonder un empilement granulaire de façon non-destructive.

Liu et Nagel [27, 28, 29, 30] ont mis en évidence certains comportements étonnants du son dans les milieux granulaires. Ils ont notamment constaté que le comportement de l'onde présente une extrême sensibilité à la position précise de chacun des grains de l'empilement (Fig. I.2). Le mouvement de quelques grains, causé par le passage de l'onde elle-même, suffit pour perturber le réseau des contacts et modifier ainsi grandement le chemin emprunté par l'onde. On mesure alors un signal d'aspect extrêmement bruité mais qui reflète l'évolution des chemins suivis par l'onde. Dans le même ordre d'idée et pour des amplitudes d'excitation

légèrement inférieures, ils ont montré qu'une expansion<sup>2</sup> de  $2 - 3 \mu\text{m}$  d'un seul grain d'un empilement constitué de plusieurs milliers de billes de diamètre 5 mm pouvait provoquer une modification de 25% du signal mesuré par un capteur situé à plusieurs centimètres. Ces deux effets soulignent l'extrême sensibilité de l'onde à l'arrangement spatial précis de tous les grains de l'empilement.

Pour étudier la propagation du son, Shukla *et coll.* ont été les seuls jusqu'à aujourd'hui à employer la photoélasticité pour étudier la propagation d'ondes initiées par une explosion dans un milieu granulaire. Ils se sont notamment intéressés à l'effet de la forme des grains et de la géométrie de l'empilement sur la propagation de l'onde [31, 32, 33, 34].

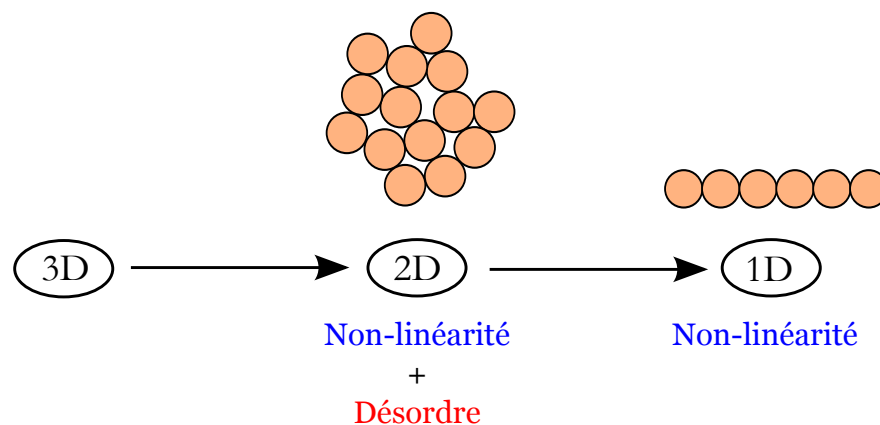
### I.3 Approche simplificatrice au laboratoire

Nous avons vu que les milieux granulaires sont omniprésents dans notre quotidien et présentent des comportements qui les distinguent des autres matériaux. Ceci est lié à l'aspect divisé de ces milieux. Pour ces deux raisons (omniprésence et originalité du comportement), les physiciens, les ingénieurs et les industriels s'intéressent à ces milieux. Un sujet d'étude concerne la propagation d'ondes sonores. Le physicien a recours à des expériences modèles de laboratoire qui simplifient le problème tout en gardant ses caractéristiques essentielles. Une de ces simplifications peut consister à ne prendre que des grains de même forme, de même taille et fait du même matériau. Nous avons déjà mentionné qu'une onde sonore est sensible à la fois au désordre de l'empilement et à la non-linéarité de la loi de contact. Pour distinguer ces deux effets au laboratoire, une stratégie souvent utilisée consiste à étudier le comportement d'une onde dans une chaîne unidimensionnelle de grains. De cette façon, on s'affranchit du caractère désordonné du milieu et on ne teste ainsi que l'effet de la non-linéarité de la loi de contact sur les propriétés de l'onde (Fig. I.3). On adoptera aussi cette stratégie dans cette thèse dans les chapitres IV et V.

---

2. L'expansion du grain est générée par une résistance chauffante de la forme d'un grain dont la température a augmenté de 1 K.

---



**FIG. I.3** – *Simplification utilisée au laboratoire pour étudier les milieux granulaires. Nous ne commençons pas par étudier un système réel tridimensionnel (3D) mais des empilements modèles bidimensionnels (2D) et même unidimensionnels (1D). Les empilements seront constitués de grains identiques, de mêmes tailles et de mêmes formes. Pour distinguer les effets du désordre et de la non-linéarité sur le comportement de l'onde, on utilise la chaîne 1D. Dans cet empilement, le comportement de l'onde sera uniquement dicté par la non-linéarité des contacts entre les grains. On pourra ensuite passer à l'empilement 2D (plus proche de la réalité mais aussi plus complexe) dans lequel le désordre du réseau des contacts interviendra.*

## I.4 Le désordre de l'empilement

Nous avons déjà évoqué qu'un empilement *réel* de grains présente toujours un désordre dans le réseau des contacts. Même si géométriquement les centres des grains sont alignés suivant un réseau parfait, un léger défaut dans la forme et/ou dans la taille des grains suffit pour que des grains voisins ne se touchent pas. Ainsi le réseau des contacts est désordonné et une force extérieure appliquée à l'empilement se répartit suivant un petit nombre de grains et forment des *chaînes de forces*. Le long de ces chaînes, les grains sont soumis à des forces importantes tandis que les autres grains ne sont pas comprimés. Dans la vie quotidienne, cela explique qu'il n'est pas nécessairement plus délicat de retirer une bûche en bas d'un tas de bois qu'en haut alors qu'elle est censée encaisser le poids de toutes les autres situées au dessus (Fig. I.4).

Nous discuterons plus tard au § II.2.2 le rôle de l'activation des contacts sur les propriétés élastiques d'un empilement granulaire. Dans ce paragraphe, nous évoquons de façon très succincte certaines propriétés de la répartition des forces dans un empilement granulaire.

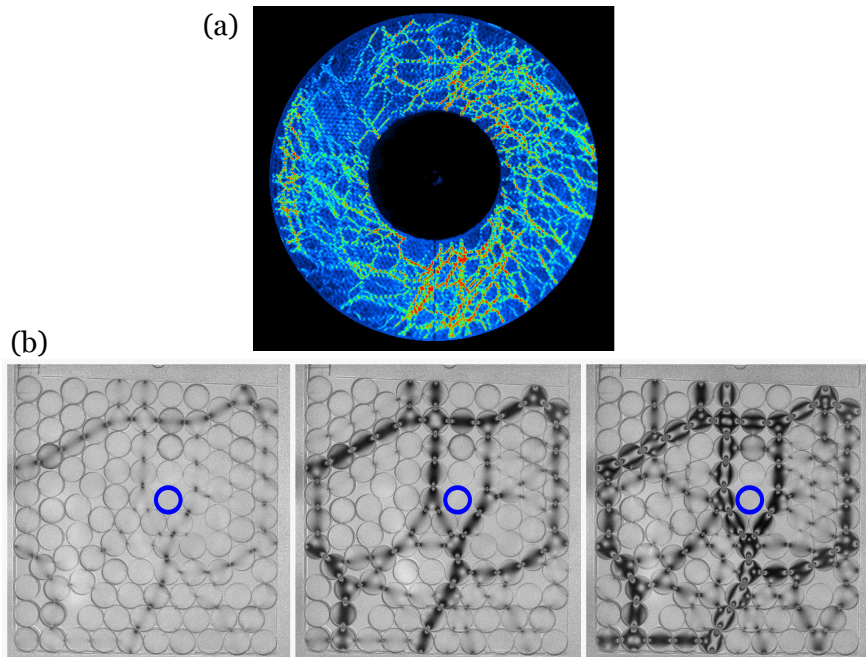
Une façon simple et élégante d'observer l'hétérogénéité de la répartition des forces dans un





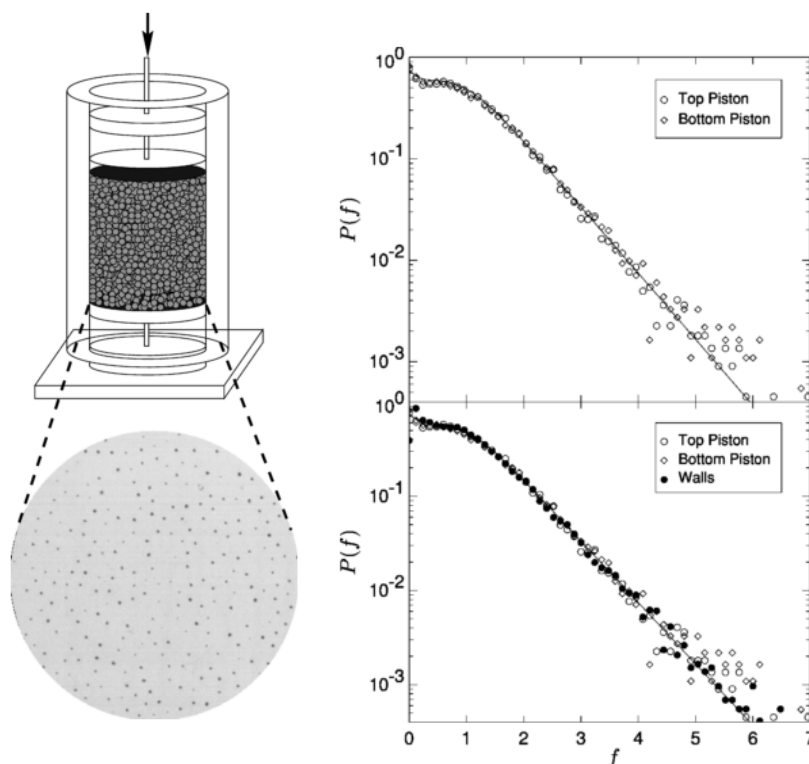
**FIG. I.4** – *Dans un tas de bûches, il n'est pas nécessairement plus délicat de retirer une bûche située au bas du tas qu'une autre en haut du tas. Tout dépend des contacts entre la bûche et ses voisines : une bûche en bas du tas peut ne pas ressentir l'effet du poids de toutes celles situées au dessus d'elle. Il est alors très aisé de la retirer.*

empilement granulaire est d'utiliser des grains photoélastiques placés entre deux polariseurs [35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]. C'est ce qu'illustre la Fig. I.5.



**FIG. I.5** – *Visualisation par photoélasticité des chaînes de forces dans un milieu granulaire soumis (a) à un cisaillement (tiré de [38]), (b) à une compression uniaxiale. Dans cette expérience, on appuie avec une force verticale croissante de 50, 100, 150 N (de gauche à droite). On remarque que le grain marqué par le contour gras ne ressent jamais la compression alors que ses plus proches voisins sont de plus en plus comprimés. Cela traduit l'hétérogénéité des forces au sein du milieu granulaire.*

Cependant, il est assez difficile de se servir de ces images pour procéder à une étude



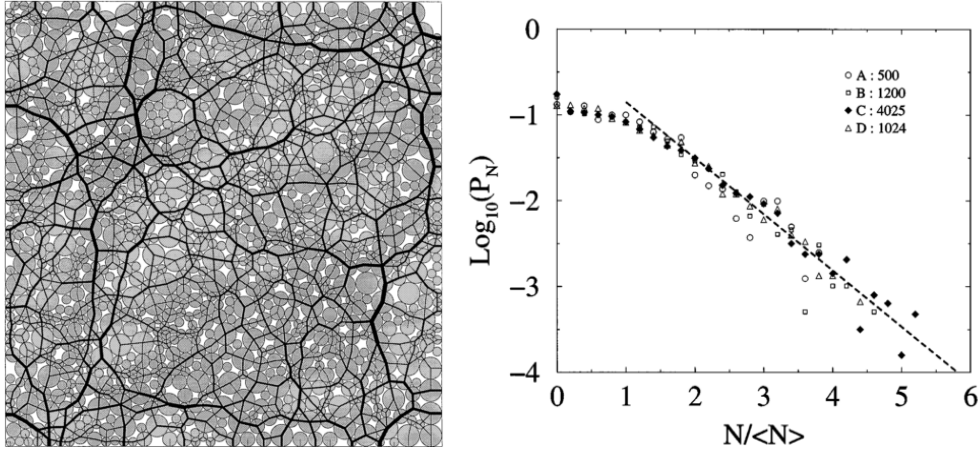
**FIG. I.6** — Le système d'étude est un récipient cylindrique rempli de grains et dont la surface intérieure est recouverte de papier carbone. Les grains sont comprimés par un piston. En analysant la trace faite par les grains sur le papier, les auteurs en déduisent la force qui agit localement sur un grain. Les deux graphes montrent la distribution des forces sur les pistons du haut, du bas et sur la surface latérale. La distribution de forces est extrêmement large et suit une loi exponentielle pour  $f > 1$ . Tiré de Nagel et coll. [42].

quantitative de la distribution des forces à l'échelle locale d'un grain.

Nagel [42] et Liu [43] ont utilisé une méthode originale pour mesurer les forces dans l'empilement : ils tapissent les surfaces internes d'un cylindre d'une feuille de papier carbone (Fig. I.6). Ils remplissent le récipient de grains et applique une contrainte à l'empilement à l'aide d'un piston. En mesurant la surface de la trace laissée par les grains sur le papier, ils en déduisent la force  $F$  qui agit localement sur le grain. Ainsi, ils ont mis en évidence une distribution de forme exponentielle  $P(f) \propto \exp(-f)$  pour les forces supérieures à la force moyenne  $\langle F \rangle$  (on a défini  $f$  tel que  $f = F / \langle F \rangle$ ). Une telle loi de distribution illustre que les fluctuations de force sont extrêmement importantes<sup>3</sup>. Ce résultat a par la suite été confirmé numériquement [44, 45, 46] (Fig. I.7).

3. Une telle loi indique en effet que les fluctuations de forces dans le milieu sont de l'ordre de grandeur de la valeur moyenne  $\langle F \rangle$ .





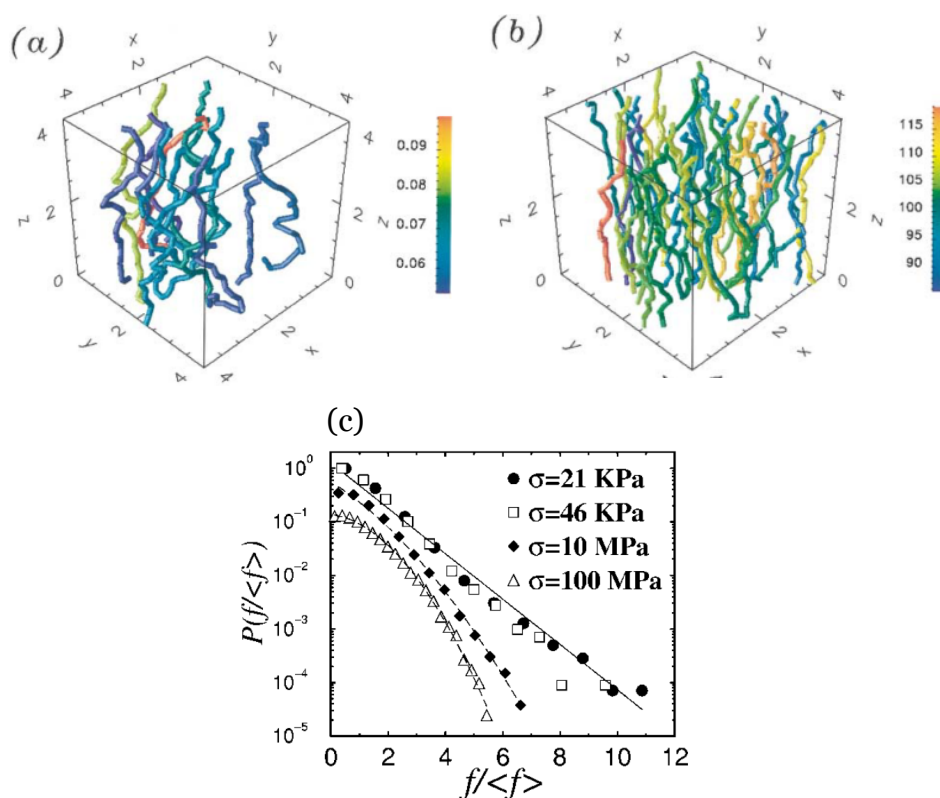
**FIG. I.7** — *Gauche : Représentation, issue d’une simulation numérique, du réseau de forces normales qui s’exercent entre des grains dans un empilement de grains frottants et polydispersés. La largeur du trait est proportionnelle à la force supportée. Droite : Distribution des forces normales associée. On retrouve la queue exponentielle observée expérimentalement pour les grandes forces. Tiré de Radjai et coll. [44].*

Makse [47] a étudié l’évolution des chaînes de forces dans un empilement tridimensionnel pour différentes forces extérieures appliquées (Fig. I.8). Aux faibles forces, on voit que le chargement est réparti suivant un petit nombre de chemins tortueux, les *chaînes de forces* et la distribution de forces est exponentielle (Fig. I.8.c). Lorsque la force augmente, de nouveaux contacts sont créés établissant ainsi de nouvelles chaînes de forces. On remarque que la distribution spatiale des chaînes de force devient plus homogène. Cette homogénéisation s’accompagne d’une transition dans la loi de distribution des forces :  $P(f)$  passe d’une distribution exponentielle (pour les faibles contraintes) à une distribution gaussienne (pour les grandes contraintes). Cette transition dans la distribution des forces traduit une « perte de localisation » des chaînes de forces et une homogénéisation du réseau.

## I.5 La non-linéarité du contact de Hertz

La description du contact entre deux grains est la base microscopique du comportement macroscopique d’un empilement granulaire. En effet, les propriétés de l’empilement sont en grande partie gouvernées par les propriétés locales du contact. Nous allons chercher à déterminer les paramètres du contact entre deux grains.

Considérons deux corps solides que l’on presse l’un contre l’autre. Sous l’effet des forces



**FIG. 1.8** – Représentation tridimensionnelle des chaînes de forces dans un empilement de 10000 billes de verre de rayon 0.1 mm contenues dans une boîte de 4 mm de côté. (a) : Empilement soumis à une contrainte de  $\sigma = 21$  kPa. Le chargement est réparti suivant un petit nombre de grains, la répartition des forces est très hétérogène (le code couleur représente la force en Newton), et la distribution de forces  $P(f)$  est exponentielle. (b) : Empilement soumis à une contrainte de  $\sigma = 100$  MPa. De nouvelles chaînes de forces ont été créées, la répartition des forces est beaucoup plus homogène, la distribution  $P(f)$  est désormais gaussienne. (c) : Distribution de forces  $P(f)$  pour différentes contraintes appliquées. On remarque une transition d'une loi exponentielle à gaussienne lorsque la contrainte  $\sigma$  augmente. Tiré de [47].

appliquées, ceux-ci vont se déformer, changer de forme et de volume. Nous souhaiterions prédire la dimension de l'aire de contact, la répartition des contraintes et des déformations dans les deux corps en fonction des forces appliquées, de la géométrie des corps et de leurs propriétés élastiques.

La mécanique des corps solides, considérés comme des milieux continus, constitue le contenu de la *Théorie de l'élasticité* [25, 48, 49, 50]. La première étude satisfaisante du *Contact Mécanique entre Deux Corps Solides* remonte à 1881 et est dû à Heinrich Hertz alors âgé de 24 ans. Elle est basée sur les équations fondamentales de l'élasticité, établies

dans les années 1820 par Cauchy et Poisson et sur des considérations géométriques portant sur les corps en contact.

Dans la suite, nous allons restreindre notre étude à deux types de géométrie : le contact entre des sphères et le contact entre des cylindres d'axe parallèle. Lorsque les solides sont amenés tout juste au contact mais sans être encore déformés, ils ne se touchent qu'en un point (pour les sphères) ou une ligne (pour les cylindres). Sous l'action d'une faible compression, chacun d'eux se déforme et il apparaît une zone de contact. Les hypothèses aux calculs de la théorie du contact de Hertz sont au nombre de quatre [50, 51] :

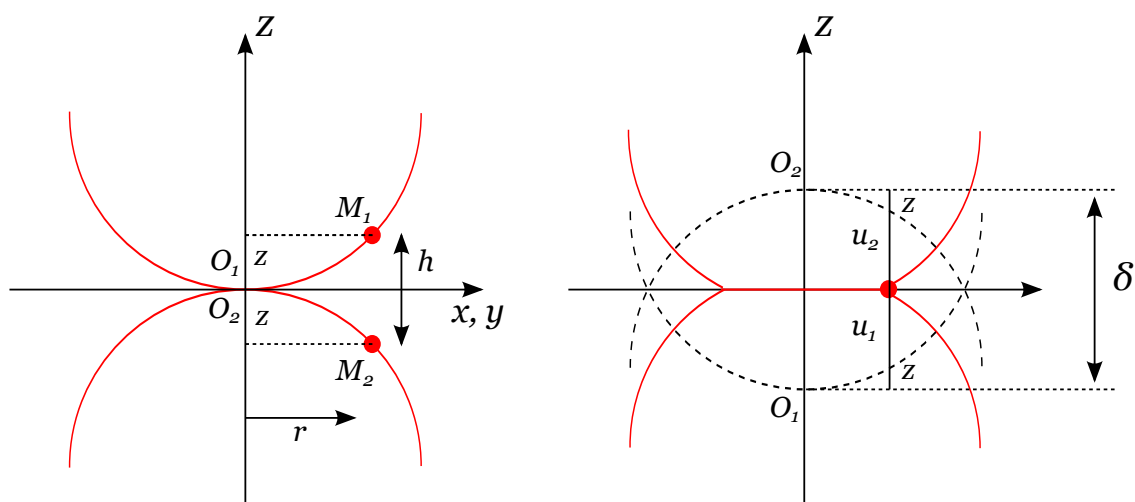
- La surface de contact est elliptique. Cela suppose que les surfaces des deux solides soient lisses et continues
- Afin de calculer les déformations locales, on suppose que chaque solide peut être vu comme un demi-espace infini, élastique et chargé sur une surface elliptique au niveau de son interface
- Les dimensions de la zone de contact sont petites devant la taille et le rayon de courbure de chaque corps. La première condition est nécessaire pour utiliser le problème équivalent du demi-espace élastique. La deuxième condition assure que la surface juste en dehors de la zone de contact n'est pas trop différente de la surface plane du demi-espace élastique équivalent. De plus, cette condition assure que les déformations dans la région du contact ne sont pas trop importantes pour sortir du cadre de l'élasticité linéaire
- Les surfaces de chaque corps sont supposées sans frottement de sorte que seule une force normale puisse être transmise lors de la compression

Avant de formuler le problème d'élasticité, nous allons nous intéresser aux considérations géométriques du contact.

### I.5.1 Considération géométrique du contact

La figure I.9.a représente deux sphères (ou deux cylindres) identiques de rayon  $R$  vues en coupe. Initialement, les deux corps sont tout juste au contact. On appelle  $O_1$  et  $O_2$  les deux points appartenant au solide 1 et 2 qui coïncident à l'état initial et  $\Pi$  le plan tangent. Soient deux points  $M_1$  et  $M_2$  situés à la surface de chacun des corps, alignés sur une droite parallèle à  $z'z$  (on appelle  $r$  la distance par rapport à l'axe  $z'z$ ), symétriques par rapport au plan  $\Pi$ . On note  $z$  la distance qui les sépare du plan  $\Pi$  et  $h$  la distance entre  $M_1$  et  $M_2$ . On

---



**FIG. I.9** – *Considération géométrique du contact entre deux sphères (ou cylindres) identiques. (a) : Les grains sont tout juste au contact; (b) : les grains sont soumis à une force de compression de sorte que leurs centres se rapprochent d’une distance  $\delta$ .*

a donc  $h = 2z$ . Lors de la compression, les centres des deux solides bougent le long de l’axe  $z$  et se rapprochent de  $\delta$ . Les courbes en pointillés de la Fig. I.9.b représentent les surfaces des deux solides telles qu’elles seraient en l’absence de déformation. En réalité, les solides se déforment et les points  $M_1$  et  $M_2$  se déplacent d’une quantité  $u(r)$ .

Comme on peut s’en apercevoir sur la figure, si les points  $M_1$  et  $M_2$  se touchent dans la zone de contact, on a :

$$2z + 2u = \delta \quad (\text{I.1})$$

sinon

$$2z + 2u > \delta \quad (\text{I.2})$$

Ces deux équations sont les équations géométriques du contact. A ce niveau, nous n’avons fait appel à aucun ingrédient de la théorie de l’élasticité.

On peut alors reformuler le problème de Hertz [50] :

Quelle est la pression  $p(x, y)$  qui s’applique au niveau de la surface de contact  $S$  entre deux demi-espaces infinis et élastiques qui produit le déplacement  $u$  vérifiant l’équation I.1 à l’intérieur de  $S$  et l’équation I.2 à l’extérieur de  $S$  ?

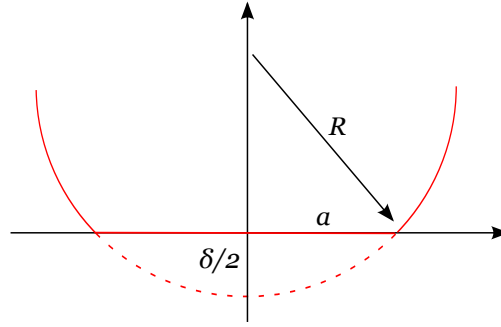
La démarche est donc la suivante : il faut supposer l’expression de la pression  $p$  agissant sur la surface de contact, calculer le champ de déplacement en tous points du demi-espace

élastique engendré par cette pression, et vérifier si ce champ  $u$  vérifie les Eqs. I.1 et I.2.

Nous allons, dans la suite de ce paragraphe, s'intéresser au cas du contact entre deux sphères identiques de rayon  $R$ . Le cas du contact entre deux cylindres sera traité dans le troisième chapitre. Avant de résoudre le problème de Hertz à proprement parlé, nous allons présenter un raisonnement dimensionnel.

### I.5.2 Détermination *a priori* des paramètres du contact de Hertz

Dans le cas du contact entre deux sphères identiques de rayon  $R$ , on a  $h = r^2/R = 2z$  et la surface de contact est un cercle de rayon  $a$  (Fig. I.10).



**FIG. I.10** – La zone de contact entre deux sphères comprimées est un cercle de rayon  $a$ .

D'après la Fig. I.9, on remarque que  $u(r = 0) = \delta/2$ , l'Eq. I.1 se réécrit :

$$2u(r = 0) - 2u(r) = \frac{r^2}{R} \quad (\text{I.3})$$

Soit, en divisant par  $a$  :

$$\frac{u(r = 0) - u(r)}{a} = \frac{r^2}{2aR} \quad (\text{I.4})$$

On évalue cette équation en  $r = a$  et on pose  $d = u(r = 0) - u(r = a)$  :

$$\frac{d}{a} = \frac{a}{2R} \quad (\text{I.5})$$

Je précise que cette dernière équation est un résultat purement géométrique. Nous utilisons maintenant un résultat de l'élasticité linéaire : la loi de Hooke. La déformation<sup>4</sup>, ici

---

4. On identifie la déformation des sphères à  $d/a$ . Cette hypothèse est toujours utilisée pour présenter

$d/a$ , est égale à la pression  $p$  divisée par le module d'Young  $E$ . L'équation précédente devient alors :

$$\frac{p}{E} \propto \frac{a}{2R} \quad (\text{I.6})$$

soit,

$$a \propto \frac{2pR}{E} \quad (\text{I.7})$$

De plus, la pression  $p$  peut s'exprimer en fonction de la force de compression  $F$  appliquée sur les sphères :  $F = \pi a^2 p$ .

On obtient l'expression du rayon  $a$  de la zone de contact :

$$a \propto \left( \frac{2RF}{\pi E} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{I.8})$$

On en déduit l'évolution de la surface de contact  $S$  :

$$S \propto \left( \frac{2RF}{\sqrt{\pi E}} \right)^{2/3} \quad (\text{I.9})$$

De plus, en appliquant le théorème de Pythagore sur la Fig. I.10, on obtient  $(R - \delta)^2 = R^2 + a^2$ , soit au premier ordre en  $\delta$  :

$$2R\delta = a^2 \quad (\text{I.10})$$

En combinant les Eqs. I.8 et I.10, on trouve une relation entre la force de compression  $F$  et l'écrasement des sphères  $\delta$  :

$$F \propto \sqrt{2R\pi E} \delta^{3/2} \quad (\text{I.11})$$

Il est intéressant de noter que ce raisonnement est essentiellement basé sur des considérations géométriques. Seule la relation entre la déformation  $d$  et la pression  $p$  relève de l'élasticité des solides. La non-linéarité du contact de Hertz est essentiellement due aux effets géométriques.

---

la loi du contact de Hertz par une approche dimensionnelle. Toutefois, cela n'est, *a priori*, pas évident ; on pourrait supposer que la déformation serait de l'ordre de  $d/R$ . Seule l'analyse exacte d'élasticité peut justifier cette identification.

---

### I.5.3 Résolution du contact de Hertz

Nous allons dans ce paragraphe résoudre analytiquement le problème du contact de Hertz. Nous comparerons les résultats avec ceux obtenus à partir de l'analyse dimensionnelle.

Il faut trouver la pression  $p$  appliquée à la surface circulaire  $S$  d'un demi-espace élastique qui engendre le champ de déplacement  $u$  vérifiant les Eqs. I.1 et I.2 :

Hertz a proposé la pression suivante :

$$p(r) = p_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{I.12})$$

Il faut ensuite chercher le champ de déplacement associé à cette pression appliqué à un demi-espace élastique. Ce problème d'élasticité a été résolu par Boussinesq ([52]). Le déplacement normal d'un point à la surface vaut [50] :

$$u(r) = \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2) \quad \text{pour } r \leq a \quad (\text{I.13})$$

où  $E$  est le module d'Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson.

En injectant cette solution dans l'équation I.1 avec  $h = r^2/R$ , on obtient :

$$2 \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2) = \delta - \frac{r^2}{R} \quad (\text{I.14})$$

En identifiant termes à termes, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{1 - \nu^2}{E} \pi p_0 a &= \delta \\ \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\pi p_0}{a} &= \frac{2}{R} \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

De plus, on a aussi une relation entre la force appliquée  $F$  et la pression  $p_0$  :

$$F = \int_0^a p(r) 2\pi r dr = \frac{2}{3} \pi a^2 p_0 \quad (\text{I.16})$$

On dispose de trois inconnues ( $p_0, a, \delta$ ) et de trois équations, on peut donc résoudre le problème de Hertz et trouver une expression analytique des différents paramètres du contact :

$$a = \left[ \frac{3R}{4} \left( \frac{1 - \nu^2}{E} \right) F \right]^{1/3} \quad (\text{I.17})$$

$$F = \frac{\sqrt{2R}}{3} \left( \frac{E}{1 - \nu^2} \right) \delta^{3/2} \quad (\text{I.18})$$

Ces résultats sont des résultats exacts de l'élasticité linéaire. On remarque qu'on retrouve les lois d'échelles trouvées au paragraphe précédent.

La théorie de Hertz prévoit donc que le rayon  $a$  de la surface de contact et la distance d'interpénétration  $\delta$  sont des fonctions non linéaires de la force  $F$  appliquée. Cette propriété est une conséquence de la géométrie sphérique des corps en contact. En fait, la loi de Hertz est « doublement » non-linéaire : en plus de la puissance  $3/2$ , elle n'est évidemment vraie qu'en compression. Il faut donc écrire :

$$F = \begin{cases} \frac{\sqrt{2R}}{3} \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right) \delta^{3/2} & \text{si } \delta > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

Donnons quelques ordres de grandeur des paramètres du contact de Hertz. Prenons deux billes, l'une en acier et l'autre en polycarbonate, toutes deux de 1 cm de rayon :

- Bille en acier ; pour une force  $F = 100$  N, la déformation est de  $\delta = 4 \mu\text{m}$  et le rayon de la surface de contact vaut  $a = 150 \mu\text{m}$  ;
- Bille en acier ; pour une force  $F = 1000$  N,  $\delta = 20 \mu\text{m}$  et  $a = 320 \mu\text{m}$  ;
- Bille en polycarbonate ; pour une force  $F = 100$  N,  $\delta = 80 \mu\text{m}$  et  $a = 600 \mu\text{m}$  ;
- Bille en polycarbonate ; pour une force  $F = 1000$  N,  $\delta = 380 \mu\text{m}$  et  $a = 1.4$  mm ;

Même dans le cas le plus défavorable d'une bille avec un module d'Young relativement faible et soumis à une grande force (dernier cas), on voit que la taille de la zone de contact  $a$  et l'écrasement  $\delta$  sont petits par rapport à la taille de l'objet  $R$ . On est ainsi assuré que les hypothèses faites pour mener le calcul de Hertz sont facilement vérifiées et ne sont donc pas contraignantes.

Estimons maintenant le volume  $V_{\text{déformation}}$  dans lequel les déformations engendrées dans les sphères sont significatives. Par définition, ce volume est de l'ordre de :

$$V_{\text{déformation}} \propto a^2 \delta \quad (\text{I.20})$$

En utilisant l'équation géométrique I.10, cette équation devient :

$$V_{\text{déformation}} \propto R \delta^2 \quad (\text{I.21})$$



On en déduit le rapport du volume des déformations sur le volume de la bille :

$$\frac{V_{\text{deformation}}}{V_{\text{bille}}} \propto \frac{R\delta^2}{R^3} \propto \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \ll 1 \quad (\text{I.22})$$

Cela montre que les déformations sont localisées dans un très petit volume autour de la région de contact. Cette propriété est essentielle pour pouvoir modéliser les interactions dans une chaîne de sphères par une association en série de masses et de ressorts. Cela est le sujet du prochain chapitre.

---

# Chapitre II

## Ondes sonores dans des empilements granulaires. Etat de l'art.

### Sommaire

---

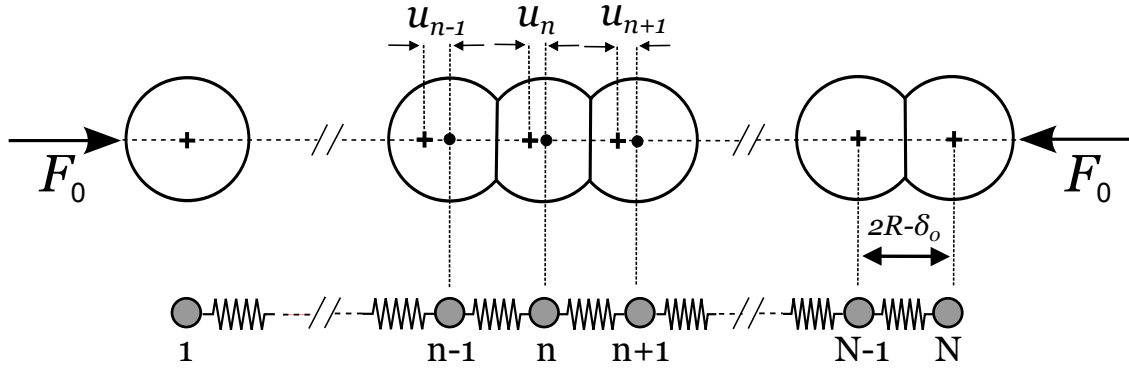
<b>II.1 Ondes sonores dans une chaîne unidimensionnelle de sphères .</b>	<b>24</b>
II.1.1 Le modèle de la chaîne de masses-ressorts . . . . .	24
II.1.2 Régime linéaire . . . . .	25
II.1.2.1 Modèle théorique . . . . .	25
II.1.2.2 Résultats expérimentaux sur le régime linéaire . . . . .	27
II.1.3 Régime faiblement non-linéaire . . . . .	30
II.1.4 Régime fortement non-linéaire . . . . .	31
II.1.4.1 Le modèle théorique . . . . .	31
II.1.4.2 Résultats expérimentaux . . . . .	38
<b>II.2 Ondes sonores dans des empilements bi- et tridimensionnels .</b>	<b>42</b>
II.2.1 Théorie des milieux effectifs . . . . .	42
II.2.2 Activation des contacts . . . . .	44
II.2.3 Origine physique de l'activation des contacts . . . . .	49
II.2.4 Diffusion multiple des ondes élastiques dans les milieux granulaires	50
II.2.5 Ondes élastiques de rotation . . . . .	52
<b>II.3 L'originalité de notre approche . . . . .</b>	<b>52</b>

---

## II.1 Ondes sonores dans une chaîne unidimensionnelle de sphères

### II.1.1 Le modèle de la chaîne de masses-ressorts

Nous nous intéressons dans cette section à la propagation d'excitations sonores dans une chaîne unidimensionnelle constituée de  $N$  sphères identiques de rayon  $R$  et de masse volumique  $\rho$ . Les sphères sont en contact deux à deux et soumises à une force de confinement statique  $F_0$ . Sous l'action de cette force, les sphères vont se déformer et leurs centres vont se rapprocher d'une distance  $\delta_0$ . Nous avons vu au chapitre précédent que lorsque deux sphères sont comprimées l'une contre l'autre, elles se déforment dans une zone autour de la région de contact, zone qui est très petite par rapport aux dimensions de la sphère. Le reste de la bille est inchangée. De ce fait, il est possible de représenter chacune des billes de la chaîne par une masse ponctuelle  $M = 4/3\rho\pi R^3$  reliées entre elles par un ressort non-linéaire donné par l'Eq. I.18. Cela est représenté sur la Fig. II.1.



**FIG. II.1** – Chaîne unidimensionnelle de sphères comprimées par une force de confinement statique  $F_0$ . Cette force statique produit un rapprochement  $\delta_0$  du centre des sphères. On modélise cette chaîne par une association de masses  $M$  et de ressorts vérifiant la loi de Hertz. Les croix (+) correspondent aux positions du centre des sphères lorsque la chaîne est sous précontrainte statique. Lorsqu'une excitation se propage dans la chaîne, le centre des sphères se déplace de  $u_n$ . La position instantanée des sphères est représentée par le cercle noir (•).

Nous appelons  $u_n$  le déplacement de la  $n^{ieme}$  masse, compté depuis sa position d'équilibre sous compression statique. La dynamique de la chaîne, en négligeant toute dissipation, est donnée par le système de  $N$  équations différentielles couplées suivantes [53] :

$$M\ddot{u}_n = A \left[ (\delta_0 + u_{n-1} - u_n)_+^{3/2} - (\delta_0 - u_{n+1} + u_n)_+^{3/2} \right] \quad (\text{II.1})$$

où l'indexation  $(\cdot)_+$  signifie que la force vaut zéro lorsque l'élongation est positive.  $A$  est le préfacteur de la loi de Hertz et a pour expression :

$$A = \frac{\sqrt{2R}}{3} \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (\text{II.2})$$

La loi de Hertz est un résultat d'élastostatique que nous utilisons ici pour un problème dynamique. On s'attend toutefois à ce qu'elle reste valide dans des situations quasistatiques pour lesquelles l'échelle de temps  $\tau$  associée aux variations de force est grande devant le temps mis par les ondes acoustiques pour parcourir un aller-retour dans le grain. Cela se traduit par :

$$\tau \ll 2 \frac{2R}{c_l} \quad (\text{II.3})$$

où  $c_l$  est la vitesse des ondes acoustiques longitudinales dans le matériau constituant les sphères.

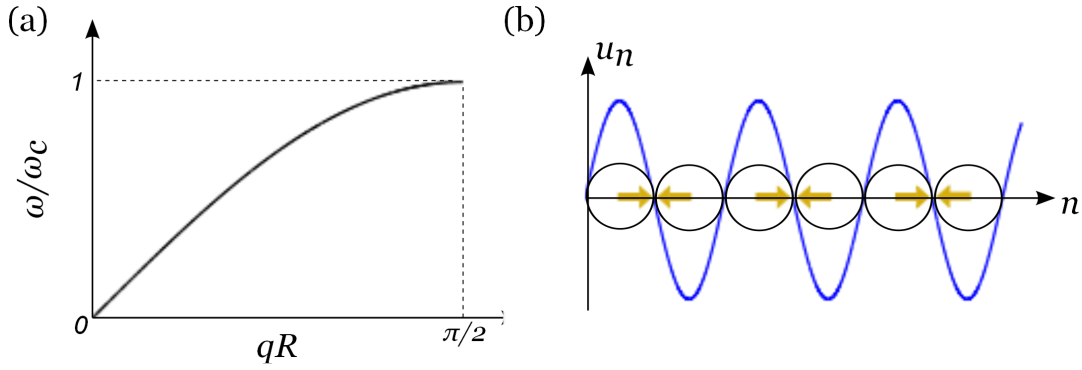
Il n'est pas possible de trouver des solutions au système d'équations donné par II.1 en prenant à la fois en compte les effets non-linéaires et le caractère discret du réseau. On analysera dans ce chapitre trois limites des équations II.1 :

- $|u_{n+1} - u_n| \ll \delta_0$  : cette limite constitue le régime linéaire. On peut linéariser le système en faisant un développement à l'ordre 1 de  $|u_{n+1} - u_n| / \delta_0$ . Il est alors possible de garder totalement la nature discrète du système.
- $|u_{n+1} - u_n| \leq \delta_0$  : ce cas correspond au régime faiblement non-linéaire. En faisant un développement à l'ordre de 2 des équations (II.1) et en passant à la limite continue, on se ramène à une équation de Korteweg-de Vries.
- $|u_{n+1} - u_n| \gg \delta_0$  : cette limite est le régime fortement non-linéaire. On ne connaît pas d'autres méthodes de résolution que de passer à la limite continue.

## II.1.2 Régime linéaire

### II.1.2.1 Modèle théorique

Le régime linéaire est obtenu lorsque le déplacement relatif dynamique  $|u_{n+1} - u_n|$  est très petit devant la distance d'interpénétration statique  $\delta_0$ , *i.e*  $|u_{n+1} - u_n| \ll \delta_0$ . Ainsi, on peut faire un développement limité du terme de droite de l'équation II.1 pour obtenir :



**FIG. II.2** – (a) : Relation de dispersion de la chaîne de masses et de ressorts. On a tracé la pulsation normalisée  $\omega/\omega_c$  en fonction de  $qR$  ; (b) : Représentation schématique du mode d'oscillation correspondant à la fréquence de coupure  $f_c$ .

$$M\ddot{u}_n = \frac{3}{2}A\sqrt{\delta_0}(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \quad (\text{II.4})$$

On retrouve l'équation habituelle pour un système constitué de masses et de ressorts avec ici une raideur non-linéaire :

$$\kappa = \left( \frac{\partial F_0}{\partial \delta_0} \right) = \frac{3}{2}A\sqrt{\delta_0} \quad (\text{II.5})$$

On cherche des solutions propagatives sous forme complexe du type :

$$u_n = u_0 e^{j(2Rnq - \omega t)} \quad (\text{II.6})$$

où  $u_0$  est l'amplitude du mode de vecteur d'onde  $q$  et  $\omega$  la pulsation. En injectant cette solution dans l'équation linéarisée précédente, on obtient la relation de dispersion habituelle pour une chaîne de masses et de ressorts :

$$\omega = 2\sqrt{\frac{\kappa}{M}} |\sin(qR)| \quad (\text{II.7})$$

La variation de  $\omega$  en fonction de  $q$  est représentée sur la Fig. II.2.

La relation de dispersion fait apparaître une fréquence de coupure  $f_c$  au-delà de laquelle les ondes progressives ne peuvent se propager. Cette fréquence correspond à une longueur d'onde égale au double du diamètre d'un grain. On montre facilement que :

$$f_c = \left( \frac{9}{16} \right)^{1/3} \frac{1}{\pi^{3/2} \rho^{1/2} R^{4/3}} \left( \frac{E}{1 - \nu^2} \right)^{1/3} F_0^{1/6} \quad (\text{II.8})$$

On en déduit également la vitesse de propagation  $c_s$  des ondes linéaires de grandes longueur d'ondes dans la chaîne de sphères<sup>1</sup> :

$$c_s = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\omega}{q} = \left(\frac{9}{2}\right)^{1/3} \frac{1}{\pi^{1/2} \rho^{1/2} R^{1/3}} \left(\frac{E}{1 - \nu^2}\right)^{1/3} F_0^{1/6} \quad (\text{II.9})$$

Les équations II.8 et II.9 montrent que la fréquence de coupure  $f_c$  et la vitesse des ondes linéaires  $c_s$  dépendent toutes deux de la compression statique comme  $F_0^{1/6}$ . Cette propriété des matériaux granulaires est une conséquence de la loi d'interaction non-linéaire du contact de Hertz. Il apparaît alors un phénomène remarquable lorsque  $F_0 \rightarrow 0$  : la vitesse du son s'annule et les ondes acoustiques ne se propagent plus. Nesterenko appelle ce régime le « vide sonique ». Cependant, il a montré que des ondes fortement non-linéaires peuvent se propager dans ce régime de « vide sonique ». Nous reviendrons sur ce phénomène au § II.1.4.

### II.1.2.2 Résultats expérimentaux sur le régime linéaire

Il est nécessaire de faire une petite incursion dans les empilements bi- et tridimensionnels pour comprendre l'intérêt des études sur des chaînes unidimensionnelles. En effet, en prolongeant le modèle précédent aux empilements de dimension supérieure, on s'attendrait à ce que la vitesse des ondes acoustiques évolue avec un exposant 1/6 en fonction de la force appliquée.

Expérimentalement, dans des empilements bidimensionnels et tridimensionnels [54, 55, 56], il semble qu'aux faibles forces la vitesse augmente bien avec la force de confinement mais pas avec la puissance attendue par le modèle de Hertz (Figs. II.12 et II.13). De façon surprenante, l'exposant que l'on peut mesurer est le même dans les différentes expériences. On peut donc résumer ces observations par :

$$c_s \propto F_0^\beta \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \beta = 1/4 & \text{pour les « faibles » forces} \\ \beta = 1/6 & \text{pour les « grandes » forces} \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

Ce désaccord entre théorie et expérience a donné lieu à de nombreuses tentatives d'interprétation. Il existe deux approches pour expliquer ces deux régimes. Une approche « microscopique » remet en cause la validité de la loi de Hertz (Eq. I.18). L'autre approche, dite

---

1. La vitesse des ondes  $c_s$  correspond à la vitesse des ondes sonores en régime linéaire dans la chaîne de sphères. Elle ne doit pas être confondue avec la vitesse  $c_l$  des ondes longitudinales dans le matériau constituant les billes.

« macroscopique », repose sur des effets collectifs liés au désordre du réseau des contacts. Ces effets n'existent que pour des empilements bi- ou tridimensionnels. On discutera de l'approche « macroscopique » au paragraphe II.2.2.

Une stratégie pour distinguer ces deux approches est de procéder à des expériences sur un réseau unidimensionnel de sphères en contact de Hertz. Ainsi les effets collectifs de l'empilement ne peuvent être invoqués et seule la loi de contact entre les grains peut influencer sur le comportement acoustique du système. La chaîne unidimensionnelle permet donc un test direct de la validité de la loi de Hertz ou de ses variantes, que nous présentons brièvement ci-après.

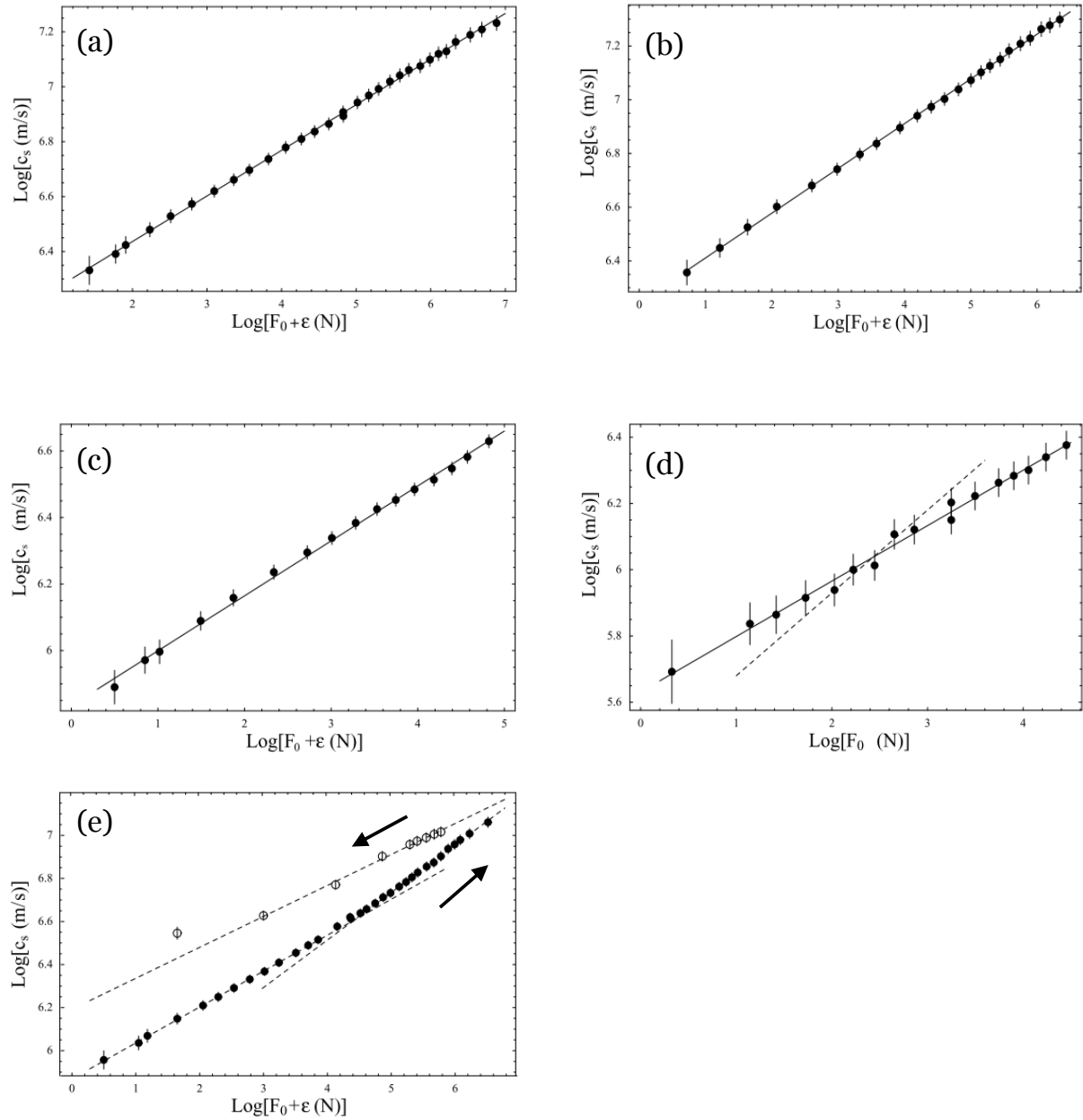
Les billes utilisées dans les expériences présentent toujours des imperfections et ne vérifient pas parfaitement les hypothèses du modèle de Hertz. Elles peuvent ne pas être exactement lisses et sphériques, présenter de la rugosité, ou faites dans un matériau inhomogène et avec un comportement plastique. Il faut alors modifier la relation entre la force  $F$  et la distance d'approche  $\delta$ .

Goddard a proposé un modèle permettant de trouver un comportement non-hertzien [54]. Il s'intéresse à la rugosité des billes et étudie pour cela le contact entre des cônes, censés modéliser les aspérités des surfaces. En reprenant le raisonnement du § I.5.2 avec  $h = \beta r$  où  $\beta$  est l'angle au sommet du cône, on trouve  $F \propto \delta^2$ , ce qui fournit bien un exposant 1/4 dans la loi de vitesse. De Gennes a proposé un autre modèle permettant de trouver également un exposant non-hertzien [57]. Il considère que des billes métalliques peuvent se recouvrir d'une couche d'oxyde qui subit alors une déformation plastique et change la loi du contact. Il trouve  $F \propto \delta^2$ , ce qui donne là aussi un exposant 1/4 dans la loi de vitesse.

Coste a étudié expérimentalement le comportement acoustique d'une rangée de billes en régime linéaire [58]. Il utilise différentes rangées de billes pour tester les différentes lois alternatives au contact de Hertz : des billes en acier inoxydables (matériau le moins plastique), en verre (matériau fragile susceptible de présenter des aspérités coniques), en laiton (métal qui s'oxyde) et enfin en Nylon (matériau le plus plastique). Les résultats sont reportés sur la Fig. II.3. A l'exception des billes en laiton qui présentent un comportement plus complexe, tous les résultats sont en excellent accord avec le modèle de Hertz et exclue ainsi le recours aux modèles non-Hertziens. Pour les billes en laiton non-oxydé, il apparaît un effet plastique à partir de 200 N et présente ensuite de l'hystérésis. Cette plasticité intervient à l'échelle de la bille et non pas des aspérités. Cette preuve permet d'infirmier sans ambiguïté les lois de

---

contact non-hertziennes.



**FIG. II.3** – Evolution, en échelles Log-Log, de la vitesse  $c_s$  des ondes sonores en régime linéaire avec la force de confinement statique  $F_0$  pour une rangée unidimensionnelle de billes d’aciers (a), de verre (b), de laiton oxydé (c), de nylon (d) et de laiton non oxydé (e). Figures modifiées tirées des mesures de Coste et Gilles [58].



### II.1.3 Régime faiblement non-linéaire

Ce régime correspond au cas  $|u_{n+1} - u_n| \leq \delta_0$ . On procède à un développement limité du terme de droite de l'Eq. II.1 à l'ordre 2 pour obtenir l'équation suivante<sup>2</sup> :

$$M\ddot{u}_n = \frac{3}{2}A\sqrt{\delta_0}(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) + \frac{3A}{8\sqrt{\delta_0}}(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)(u_{n-1} - u_{n+1}) \quad (\text{II.11})$$

En passant à la limite continue, cette équation devient<sup>3</sup> :

$$Mu_{tt} = 6A\sqrt{\delta_0}4R^2 \left( u_{xx} + \frac{1}{3}u_{xxx} \right) - \frac{3AR^3}{\sqrt{\delta_0}}u_x u_{xx} \quad (\text{II.12})$$

Cette équation se réécrit :

$$Mu_{tt} = c_s^2 u_{xx} + 2c_s \gamma u_{xxx} - \sigma (u_x^2)_x \quad (\text{II.13})$$

avec  $c_s$  la vitesse des ondes acoustiques (EQ. II.9),  $\gamma = c_s R^2/6$  et  $\sigma = c_s R^2/\delta_0$ .

En posant  $\zeta = -u_x$ , et en cherchant des solutions sous forme propagatives unidirectionnelles, on retrouve une équation du type de Korteweg-de Vries [53] :

$$\zeta_t + c_s \left[ 1 + \frac{\sigma}{c_s^2} \zeta \right] \zeta_x + \gamma \zeta_{xxx} = 0 \quad (\text{II.14})$$

Le second terme de cette équation (terme non-linéaire) correspond à une vitesse d'onde qui croît linéairement avec l'amplitude  $\zeta$ . Le troisième terme est associé à la dispersion. Lorsque la non-linéarité compense exactement la dispersion, on obtient une solution du type « onde solitaire » d'amplitude  $\Delta\zeta$  de la forme [59] :

$$\zeta - \zeta_0 = \Delta\zeta \cosh^{-2} \left[ \frac{\sigma \Delta\zeta}{24\gamma c_s} (x - V_{KdV} t) \right] \quad (\text{II.15})$$

La vitesse  $V_{KdV}$  et la largeur  $L_{KdV}$  de ce soliton valent respectivement :

$$V_{KdV} = c_s \left( 1 + \frac{R\Delta\zeta}{6\delta_0} \right) \quad (\text{II.16})$$

$$L_{KdV} = \sqrt{\frac{4R\delta_0}{\Delta\zeta}} \quad (\text{II.17})$$

2. Je rappelle que pour le régime linéaire, on procède à un développement limité au premier ordre.

3. Par commodité d'écriture, on emploie la notation  $u_t = \partial u / \partial t$  et  $u_x = \partial u / \partial x$ .

Il ressort de ces expressions que lorsque la force de confinement statique tend vers zéro ( $F_0 \rightarrow 0$ , le régime du « vide sonique »), la largeur de ce soliton tend vers zéro ( $L_{KdV} \rightarrow 0$ ). Par conséquent, l'approximation des grandes longueurs d'ondes n'est plus valable et ce type de solution n'existe pas dans le régime du « vide sonique ». Dans le prochain paragraphe, nous nous intéressons au cas fortement non-linéaire.

## II.1.4 Régime fortement non-linéaire

### II.1.4.1 Le modèle théorique

Nous avons vu que les ondes acoustiques traditionnelles ne se propagent pas dans une chaîne de sphères sans force statique de confinement. En revanche, des ondes non-linéaires peuvent s'y propager même en l'absence de précontrainte. Nesterenko a été le premier à étudié analytiquement ce système [53, 60]. On trouvera des explications détaillées dans [61, 62]. Par souci de clarté, je rappelle les différentes étapes de son raisonnement.

Le régime fortement non-linéaire correspond au cas où le déplacement relatif dynamique  $|u_n - u_{n-1}|$  est beaucoup plus grand que le déplacement statique  $\delta_0$ , *i.e.*  $|u_n - u_{n-1}| \gg \delta_0$ . A la limite, on peut même avoir  $\delta_0 = 0$  (ce qui revient à  $F_0 = 0$ , on est donc dans la limite du « vide sonique »). Cette situation correspond au cas où les sphères sont initialement tout juste en contact mais sans aucune déformation. Désormais, et afin d'alléger les calculs, les déplacements sont comptés depuis la position des sphères lorsqu'aucune force statique n'est appliquée. Toutefois, on garde encore la notation  $u_n$  pour désigner le déplacement des sphères<sup>4</sup>.

L'équation fondamentale II.1 se réécrit :

$$M\ddot{u}_n = A \left[ (u_{n-1} - u_n)_+^{3/2} - (u_n - u_{n+1})_+^{3/2} \right] \quad (\text{II.18})$$

Il n'est pas possible de résoudre cette équation en tenant à la fois compte de la discrétisation du système et de la non-linéarité. Le développement de Nesterenko suppose donc une hypothèse forte : *l'approximation du milieu continu*. Cette hypothèse suppose que l'extension spatiale  $\Gamma$  de l'onde non-linéaire soit très grande devant la taille typique d'une sphère. On introduit  $\epsilon$  comme étant le rapport de ces deux tailles caractéristiques  $\epsilon = R/\Gamma \ll 1$ . Cette hypothèse sera à vérifier *à posteriori* et expérimentalement. Avec cette approximation, on

---

4.  $u_n$  est donc ici le déplacement total des sphères.

peut écrire  $u_n(t) = u(x, t)$  où  $x$  représente l'abscisse du centre de la bille lorsqu'aucune précontrainte n'est appliquée. On écrit le développement de Taylor à l'ordre 4 pour les déplacements  $u_{n+1}$  et  $u_{n-1}$  :

$$u_{n\pm 1}(t) = u(x \pm 2R, t) = u(x, t) \pm 2R \frac{\partial u}{\partial x} + 2R^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm \frac{4R^3}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{2R^4}{3} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad (\text{II.19})$$

Désormais, on notera  $u_x(x, t) = \partial u / \partial x$  et  $u_t(x, t) = \partial u / \partial t$ .

En injectant ce développement dans l'Eq. II.18 et en utilisant le développement limité

$$(1 + \gamma)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}\gamma + \frac{3}{8}\gamma^2 - \frac{1}{16}\gamma^3 + \dots \text{ avec } \gamma \ll 1 \quad (\text{II.20})$$

on obtient :

$$u_{tt} = c^2 \left[ \frac{3}{2} u_{xx} \sqrt{-u_x} + \frac{R^2}{2} u_{xxx} \sqrt{-u_x} - \frac{R^2}{2} \frac{u_{xx} u_{xxx}}{2\sqrt{-u_x}} - \frac{R^2}{16} \frac{u_{xxx}^3}{(-u_x)^{3/2}} \right] \quad (\text{II.21})$$

$$-u_x > 0, \quad c^2 = \frac{(2R)^{5/2} A}{M} \quad (\text{II.22})$$

J'insiste sur le fait que cette équation n'est rien d'autre que l'Eq. II.18 réécrite en utilisant une approche continue du système. Les trois derniers termes de l'Eq. II.21 sont d'ordre  $\epsilon^2$  par rapport au premier terme et les termes d'ordre supérieur ont été négligés. Cette équation n'a de sens que si  $-u_x > 0$ . Comme nous le verrons plus tard, cette équation signifie que la chaîne est initialement précontrainte par une force  $F_0$  non-nulle.

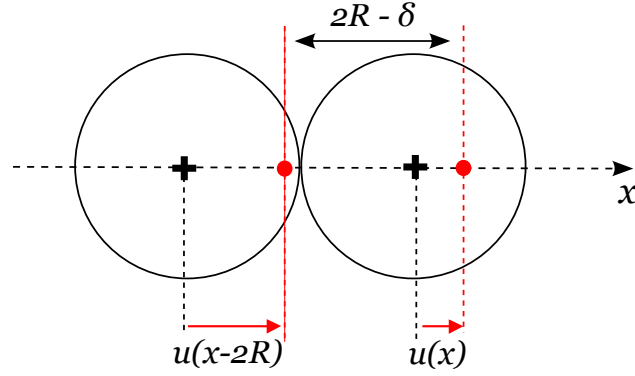
Nous cherchons une solution de l'Eq. II.21 sous forme d'onde progressive  $u(\xi = x - Vt)$  se propageant à la vitesse  $V$ , où  $V$  reste à déterminer. En se plaçant dans le référentiel de l'onde et en faisant les changements de variable suivant :

$$\Psi = -u_\xi, \quad z = \Psi^{5/4} \quad (\text{II.23})$$

l'Eq. II.21 se réécrit :

$$\frac{V^2}{c^2} \underbrace{z_\xi z^{-1/5}}_{\frac{5}{4}(z^{4/5})_\xi} = \frac{3}{2} \underbrace{z_\xi z^{1/5}}_{\frac{5}{6}(z^{6/5})_\xi} + \frac{R^2}{2} \underbrace{\left( z_{\xi\xi\xi} z^{1/5} + \frac{1}{5} z_\xi z_{\xi\xi\xi} z^{-4/5} \right)}_{(z^{1/5} z_{\xi\xi\xi})_\xi} \quad (\text{II.24})$$

Revenons un instant sur la signification physique de  $\Psi = -u_\xi$ . Pour cela, évaluons la distance entre le centre des deux sphères à un instant quelconque  $t$  (cf. Fig II.4). On rappelle que  $\delta(t)$  est l'interpénétration des deux sphères. Géométriquement, on a :



**FIG. II.4** – Signification physique de la variable  $\Psi$ . Les croix (+) représentent la position de deux sphères adjacentes lorsqu’aucune force statique n’est appliquée. Elles sont alors distantes de  $2R$ . Lorsque l’onde passe, le centre des sphères se déplace de  $u(x-2R)$  et  $u(x)$ . La position instantanée est schématisée par le cercle (•). Dans cette situation, les sphères sont distantes de  $2R - \delta$ .

$$2R + u(x, t) = u(x - 2R, t) + 2R - \delta(t) \quad (\text{II.25})$$

soit

$$\delta = u(x - 2R, t) - u(x) = -2Ru_x \quad (\text{II.26})$$

On trouve donc une expression de  $\Psi$  en fonction de  $\delta$  :

$$\delta = 2R\Psi \quad (\text{II.27})$$

Chaque terme de l’Eq. II.24 peut s’intégrer une fois par rapport à  $\xi$ . En faisant un changement de variable supplémentaire :

$$z = \left(\frac{V}{c}\right)^5 y, \quad \xi = \sqrt{\frac{2}{5}} R\eta \quad (\text{II.28})$$

on peut mettre l’équation sous une forme particulièrement simple :

$$y_{\eta\eta} = y^{3/5} - y - C^{ste} y^{-1/5} \quad (\text{II.29})$$

où  $C^{ste}$  est une constante d’intégration. Nous cherchons des solutions localisées telles que :

$$y \rightarrow y_\infty \text{ et } y_{\eta\eta} \rightarrow 0 \text{ lorsque } \eta \rightarrow \pm\infty \quad (\text{II.30})$$

si bien que la constante  $C^{ste}$  vaut :

$$C^{ste} = y_\infty^{4/5} - y_\infty^{6/5} \quad (\text{II.31})$$

Pour résumer, le problème de la propagation d'onde dans le régime fortement non-linéaire (Eq. II.1) revient à résoudre l'équation suivante :

$$y_{\eta\eta} = -\frac{d}{dy} \underbrace{\left[ -\frac{5}{8}y^{8/5} + \frac{1}{2}y^2 + \frac{5}{4}C^{ste}y^{4/5} \right]}_{W(y)} \quad \text{et} \quad y > 0 \quad (\text{II.32})$$

Dans la suite, nous nous proposons de discuter les solutions de l'Eq. II.32 en fonction de la valeur de la constante  $C^{ste}$ . On introduit  $D = (5/4) C^{ste}$ . Pour cela, nous allons faire une analogie avec un problème de mécanique. En effet l'Eq. II.32 est similaire à l'équation du mouvement d'une particule de masse unité, de position  $y$  soumise à des forces dérivant du potentiel  $W(y)$  et où  $\eta$  joue le rôle du temps.

Nous cherchons des solutions localisées ( $y_{\eta\eta} = 0$  lorsque  $\eta = \pm\infty$ ), ce qui implique, d'après l'Eq. II.32, que  $y_\infty$  est un extremum de  $W(y)$ . Par analogie avec la mécanique, on appelle  $E_\infty = W(y_\infty)$ . Considérons le cas où la particule se trouve en  $y_\infty$  et possède l'énergie  $E_\infty$ .

### Ondes solitaires de Nesterenko

Pour  $0 < D < 5/27$ ,  $W(y)$  a l'allure présentée Fig. II.5.a et présente deux *extrema*, le maximum étant en  $y_\infty$  et le minimum en  $y_- > y_\infty$ . La forme de  $W(y)$  au voisinage de  $y_\infty$  fait que la particule met un « temps » infini pour tomber du point instable  $y_\infty$ . La trajectoire partant et aboutissant en  $y_\infty$  est parcourue une seule fois lorsque le « temps » décrit un intervalle complet  $-\infty < \eta < \infty$ . Dans le contexte des ondes, cette solution correspond à une onde solitaire qui a une amplitude maximale  $y_m$  définie par :

$$W(y_\infty) = W(y_m) \quad (\text{II.33})$$

Nesterenko a été le premier à démontrer l'existence de ces ondes. Il nous reste à trouver l'expression de la vitesse de cette onde solitaire.

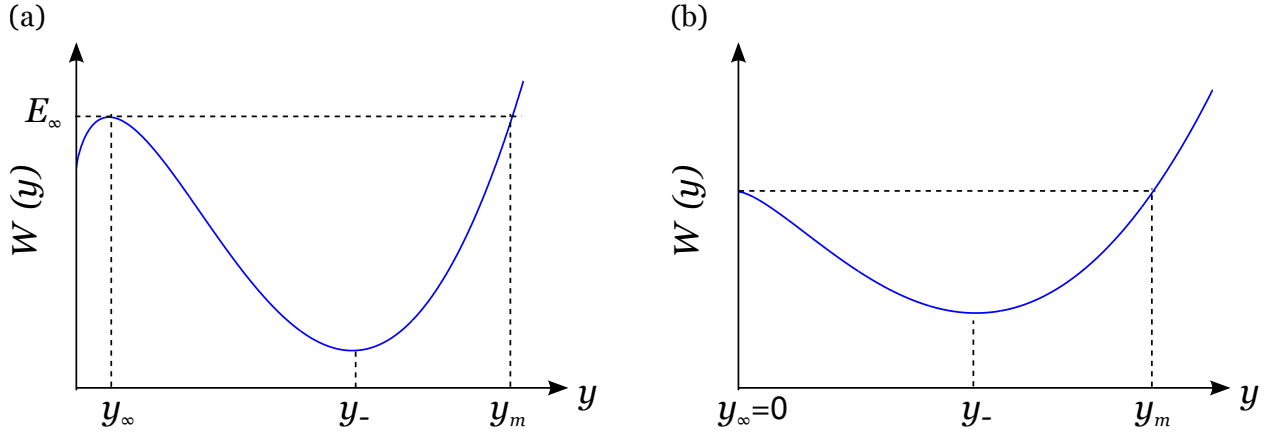
En utilisant le fait que  $W_y(y_\infty) = 0$ , l'Eq. II.33 se réécrit :

$$\frac{5}{8}y_\infty^{8/5} - \frac{3}{4}y_\infty^2 = -\frac{5}{8}y_m^{8/5} + \frac{1}{2}y_m^2 + Dy_m^{4/5} \quad (\text{II.34})$$

que l'on peut réexprimer en fonction de  $\Psi$  :

$$\frac{5}{8} \left( \frac{c}{V} \right)^4 \Psi_\infty^2 - \frac{3}{4} \left( \frac{c}{V} \right)^6 \Psi_\infty^{5/2} = -\frac{5}{8} \left( \frac{c}{V} \right)^4 \Psi_m^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{c}{V} \right)^6 \Psi_m^{5/2} + D\Psi_m \quad (\text{II.35})$$


---



**FIG. II.5** – Allure de la fonction  $W(y)$  illustrant l'analogie mécanique avec le mouvement d'une particule dans un potentiel  $W(y)$ . (a) Pour  $D = 3/27$ , la particule met un temps infini pour parcourir la trajectoire partant et aboutissant en  $y_\infty$ . Cette solution correspond à une onde solitaire. (b) Pour  $D = 0$ , la stabilité du maximum n'est plus définie, on ne parle plus d'ondes solitaires. En revanche, il existe une solution périodique non-linéaire.

De plus, on peut exprimer l'Eq. II.31 avec la variable  $\Psi$  pour obtenir :

$$D = \frac{5}{4} \left( \frac{c}{V} \right)^4 \Psi_\infty \left[ 1 - \left( \frac{c}{V} \right)^2 \Psi_\infty^{1/2} \right] \quad (\text{II.36})$$

En injectant l'Eq. II.36 dans l'Eq. II.35, on trouve l'expression de la vitesse  $V$  des ondes solitaires en fonction de la déformation statique  $\Psi_\infty$  et de la déformation maximale  $\Psi_m$ <sup>5</sup> :

---

5. Cette expression permet de retrouver l'expression de la vitesse des ondes acoustiques  $c_s$ . En effet, plaçons-nous en régime linéaire et pour cela posons  $\Psi_m = \Psi_\infty + \gamma$  avec  $\gamma \ll \Psi_\infty$ . L'équation II.42 devient :

$$V = \frac{c}{\gamma} \left[ \frac{2}{5} \left( 3\Psi_\infty^{5/2} + 2\Psi_\infty^{5/2} \left( 1 + \frac{\Psi_\infty}{\gamma} \right)^{5/2} - 5(\Psi_\infty + \gamma) \Psi_\infty^{3/2} \right) \right]^{1/2} \quad (\text{II.37})$$

$$V \approx \frac{c}{\gamma} \left[ \frac{2}{5} \left( 3\Psi_\infty^{5/2} + 2\Psi_\infty^{5/2} \left( 1 + \frac{5}{2} \frac{\Psi_\infty}{\gamma} + \frac{15}{8} \left( \frac{\Psi_\infty}{\gamma} \right)^2 \right) - 5(\Psi_\infty + \gamma) \Psi_\infty^{3/2} \right) \right]^{1/2} \quad (\text{II.38})$$

$$V \approx \frac{c}{\gamma} \left[ \frac{15}{10} \gamma^2 \Psi_\infty^{1/2} \right]^{1/2} \quad (\text{II.39})$$

$$V \approx \sqrt{\frac{3}{2}} c \Psi_\infty^{1/4} \quad (\text{II.40})$$

Or, l'Eq. II.27 évaluée lorsque  $\xi \rightarrow \infty$  donne  $\Psi_\infty = \frac{\delta(t \rightarrow \infty)}{2R} = \frac{\delta_0}{2R} = \frac{F_0^{2/3}}{2RA^{2/3}}$ . En reprenant les expressions de  $c$  et  $A$ , on trouve :

$$V \rightarrow c_s \quad \text{lorsque} \quad \Psi_m \rightarrow \Psi_\infty \quad (\text{II.41})$$

$$V = \frac{c}{(\Psi_m - \Psi_\infty)} \left[ \frac{2}{5} (3\Psi_\infty^{5/2} + 2\Psi_m^{5/2} - 5\Psi_m\Psi_\infty^{3/2}) \right]^{1/2} \quad (\text{II.42})$$

On peut aussi évaluer cette expression lorsque  $\Psi_\infty \rightarrow 0$ , ce qui correspond à la situation où la force statique  $F_0$  tend vers zéro et où les ondes acoustiques ne peuvent pas se propager :

$$V = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{c}{\Psi_\infty} \Psi_\infty^{5/4} \quad (\text{II.43})$$

$$V = \frac{2^{5/6} 3^{1/3}}{5^{1/2}} \frac{1}{R^{1/3} \pi^{1/2} \rho^{1/2}} \left( \frac{E}{1 - \nu^2} \right)^{1/3} F_m^{1/6} \quad (\text{II.44})$$

où  $F_m$  représente l'amplitude maximale de la force. On remarque une similitude importante entre les Eqs. II.44 et II.9 : la vitesse des ondes acoustiques en régime linéaire varie comme  $F_0^{1/6}$  et la vitesse de l'onde solitaire pour une force statique nulle varie comme  $F_m^{1/6}$ .

L'Eq. II.42 peut se réécrire en fonction de  $F_0$  et  $F_m$ . On calcule ensuite le rapport entre la vitesse  $V$  des ondes solitaires en régimes non-linéaires et la vitesse  $c_s$  des ondes en régime linéaire pour une même force  $F_0$ . On obtient :

$$\frac{V}{c_s} = \sqrt{\frac{4}{15}} \frac{\left[ 3 + 2 \left( \frac{F_m}{F_0} \right)^{5/3} - 5 \left( \frac{F_m}{F_0} \right)^{2/3} \right]^{1/2}}{\left( \frac{F_m}{F_0} \right)^{2/3} - 1} \quad (\text{II.45})$$

Pour une chaîne de sphères en contact de Hertz, le rapport  $V/c_s$  dépend seulement du rapport  $F_m/F_0$ .

Nous allons désormais chercher à exprimer la vitesse  $V$  de l'onde solitaire pour une force statique non-nulle  $F_0$ .

### Ondes périodiques non-linéaires

Attardons-nous<sup>6</sup> maintenant au cas  $D = 0$ , ce qui revient à dire  $y_\infty = 0$  (Eq. II.31), *i.e*  $\Psi_\infty = 0$ . Cette situation correspond à la situation physique où la force statique de confinement est nulle,  $F_0 = 0$  (Eq. II.27). La fonction  $W(y)$  est représentée sur la Fig. II.5.b. Notons dès à présent que ce cas est tout à fait particulier car il viole la condition  $y > 0$ . L'énergie potentielle a un extremum en  $y_\infty = 0$  mais la dérivée seconde est infinie en ce point.

---

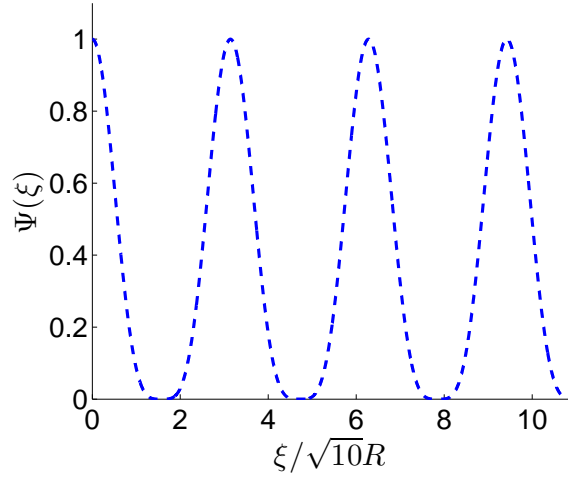
6. Pour  $D > 5/27$ , l'énergie potentielle n'a plus d'extremum et il n'existe donc pas de trajectoire bornée. Nous excluons donc ce cas.

La stabilité n'étant pas définie, des solutions ondes solitaires ne peuvent exister. Cependant, il existe une solution onde non-linéaire périodique dont l'amplitude oscille entre  $y_\infty = 0$  et  $y_m$ .

L'équation II.32 admet alors la solution analytique suivante :

$$\Psi(x, t) = \left[ \frac{5}{4} \left( \frac{V}{c} \right)^2 \right]^2 \cos^4 \left( \frac{\xi}{\sqrt{10}R} \right) \quad (\text{II.46})$$

où la vitesse de cette onde non-linéaire est donnée par l'Eq. II.44. La figure II.6 représente l'évolution théorique de  $\Psi$ .



**FIG. II.6** – Allure théorique de l'onde non-linéaire périodique dans le cas où aucune force statique  $F_0$  n'est appliquée. En pratique une seule arche de cette solution semble bien représenter l'onde solitaire de Nesterenko pour une force statique petite devant l'amplitude de l'onde.

A partir de la solution analytique de l'Eq. II.46, on en déduit la largeur spatiale  $L_s$  de l'onde :

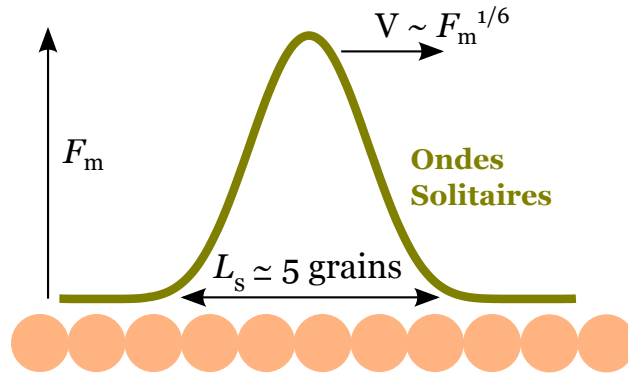
$$L_s = \sqrt{10}\pi R \approx 10R \quad (\text{II.47})$$

Les deux caractéristiques principales de cette solution sont la dépendance fortement non-linéaire de la vitesse  $V$  de l'onde avec son amplitude (Eq. II.44) et l'indépendance de la largeur  $L_s$  de l'onde avec l'amplitude. Il est à souligner que cette propriété est spécifique à cette solution et qu'on ne la retrouve pas avec les solitons de Korteweg-de-Vries (cf. Eq. II.17). A partir de l'Eq. II.46, on en déduit l'expression de la force :

$$F(t) = F_m \cos^6 \left[ \frac{Vt}{\sqrt{10}R} \right] \quad (\text{II.48})$$



Nous venons de voir que dans le régime du « vide sonique », les excitations qui peuvent se propager dans la chaîne sont les ondes non-linéaires périodiques et non pas les ondes solitaires. Cependant, il serait très surprenant qu'un changement qualitatif survienne brusquement lorsque la force statique atteint la valeur zéro, puisque les ondes solitaires existent pour une force statique  $F_0$  infiniment petite. On peut donc s'attendre à ce qu'une arche unique correspondant à l'Eq. II.46 soit une bonne approximation pour l'onde solitaire obtenue pour une force de confinement statique très petite par rapport à l'amplitude de l'onde (Fig. II.7).



**FIG. II.7** – Allure de l'onde non-linéaire qui se propage dans une chaîne de sphères dans la limite où la force de confinement tend vers zéro, i.e  $F_0 \rightarrow 0$ . Il s'agit d'une onde d'amplitude  $F_m$  qui se propage à la vitesse  $V \propto F_m^{1/6}$  de largeur constante  $L_s \approx 5$  grains. Cette solution doit aussi pouvoir convenir lorsque la force de confinement  $F_0$  est non-nulle ( $F_0 \neq 0$ ) mais reste très inférieure à l'amplitude  $F_m$  de l'onde ( $F_0 \ll F_m$ ).

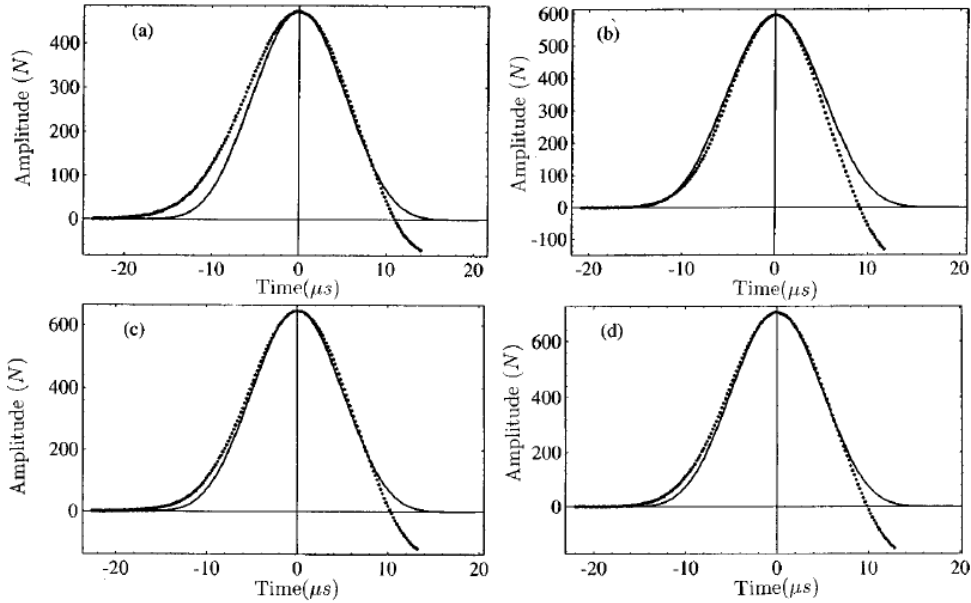
#### II.1.4.2 Résultats expérimentaux

Nous avons vu au § II.1.2.2 que les résultats expérimentaux en régime linéaire corroboraient les prédictions du modèle de Hertz et excluaient donc les alternatives à cette loi de contact. Le régime fortement non-linéaire offre une autre occasion de tester le modèle de Hertz.

Nesterenko a été le premier à démontré analytiquement l'existence des ondes non-linéaires et a les mettre en évidence expérimentalement.

Dans [61], Coste, Falcon et Fauve ont procédé à une étude quantitative et systématique concernant le profil et la vitesse des ondes non-linéaires obtenues dans une chaîne de sphères d'acier. Ils ont étudié les deux régimes  $F_0 = 0$  et  $F_0 \neq 0$ , et ils ont pu explorer une vaste gamme d'amplitude de l'onde entre 40 et 800 N. Comme on peut le voir sur la Fig. II.8 dans le cas où  $F_0 = 0$ , il y a un bon accord entre la forme de l'onde trouvée expérimentalement et

une arche de la solution théorique donnée par l'Eq. II.48. La figure II.9.a montre l'évolution de la vitesse  $V$  de l'onde avec son amplitude maximale  $F_m^{1/6}$  : là aussi l'accord avec le modèle est probant. Lorsque la chaîne est soumise à une précontrainte initiale  $F_0$ , la vitesse des ondes solitaires dépend à la fois de  $F_0$  et de l'amplitude  $F_m$  et est donnée par l'Eq. II.45. En reportant  $V/c_s$  en fonction de  $F_m/F_0$ , les points expérimentaux doivent alors se mettre sur une même courbe pour toutes les expériences effectuées. C'est bien ce que les auteurs ont observé expérimentalement (Fig. II.9.b).

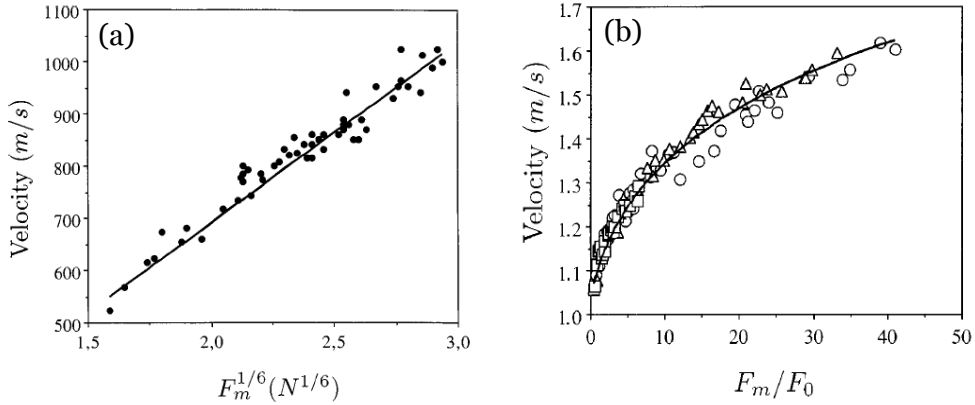


**FIG. II.8** – Profil de l'onde non-linéaire dans le cas du « vide sonique » où  $F_0 = 0$  pour quatre valeurs différentes de l'amplitude  $F_m$  de l'onde : (a)  $F_m = 473$  N ; (b)  $F_m = 594$  N ; (c)  $F_m = 646$  N ; et (d)  $F_m = 705$  N. Les points sont les mesures expérimentales et la courbe en trait plein est la solution donnée par l'Eq. II.48. L'accord entre le modèle et l'expérience est très bon. Tiré de Coste, Falcon et Fauve [61].

Comme pour le régime linéaire, Coste et Gilles [58] ont utilisé, dans le cas fortement non-linéaire, des billes de différents matériaux pour confronter le modèle théorique fondé sur la loi de Hertz aux mesures expérimentales. Dans tous les cas<sup>7</sup>, l'accord entre théorie et expériences est très bon aussi bien pour le profil de l'onde que pour la loi de vitesse.

Depuis, la classe de matériaux supportant l'existence d'ondes solitaires n'a cessé d'aug-

7. Pour les billes en cuivre, la forme de l'onde mesurée est en accord avec l'Eq II.48. En revanche, la loi de vitesse n'exhibe pas de comportement en loi de puissance avec l'amplitude de l'onde. Ceci est lié au fait que la déformation des billes en cuivre est fortement plastique. La valeur de l'amplitude de l'onde mesurée en fin de chaîne est donc très différente de celle en début de chaîne.

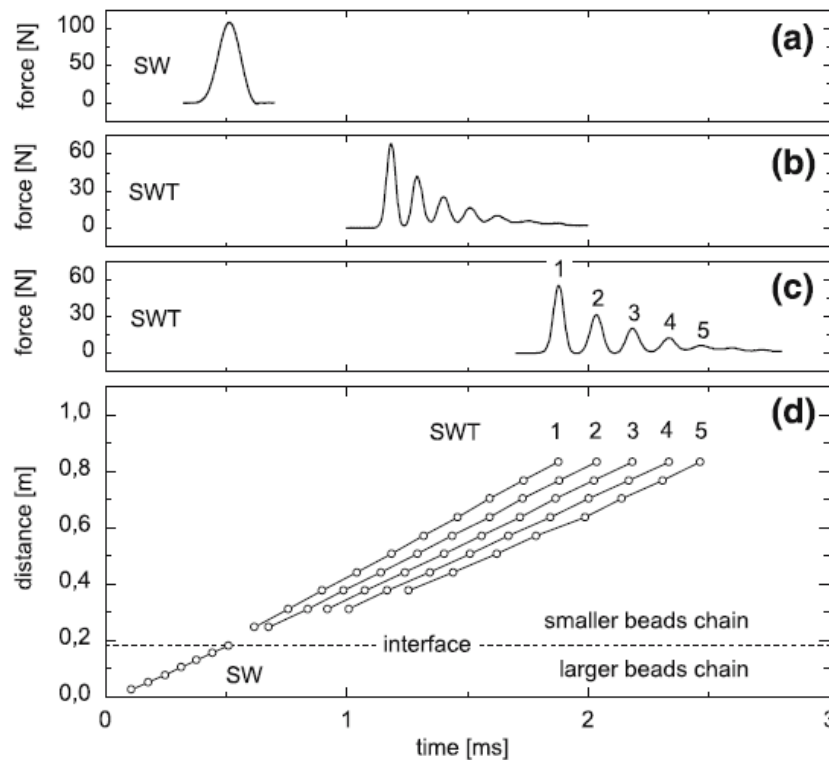


**FIG. II.9** – (a) : Evolution de la vitesse  $V$  des ondes non-linéaires en fonction de  $F_m^{1/6}$  dans le cas où  $F_0 = 0$ . (b) : Vitesse adimensionnée  $V/c_s$  en fonction de la force adimensionnée  $F_m/F_0$  pour des ondes solitaires se propageant dans une chaîne soumise à une force statique  $F_0 = 9.8 \text{ N}$  ( $\Delta$ ),  $F_0 = 29.7 \text{ N}$  ( $\circ$ ), et  $F_0 = 167 \text{ N}$  ( $\square$ ). Tous les points se mettent sur une même courbe comme prévu par l'Eq. II.45. Tiré de [61].

menter. Daraio *et coll.* ont pu observé la propagation de ces ondes dans des chaînes de sphères faites d'un matériau viscoélastiques [63, 64, 65] : la propagation de ces ondes restent bien décrites par le modèle de Hertz malgré la nature viscoélastique des billes et la faible valeur du module d'Young assure une vitesse très faible. Job *et coll.* [66] ont également étudié la propagation d'ondes dans une chaîne de sphères mouillées par un fluide visqueux : ils ont montré que la présence du fluide semble aller dans le sens d'une augmentation de la raideur du contact, ce qui accroît aussi la vitesse de propagation des ondes.

Une méthode pour générer une onde solitaire dans la chaîne de sphères consiste à percuter celle-ci par une autre bille de masse  $M_0$  lancée à la vitesse  $V_0$ . Il a été remarqué que lorsque la bille impactante est plus massive que les billes constituant la chaîne ( $M_0 > M$ ), l'onde créée à l'extrémité de la chaîne se décompose en un train de solitons [63, 64, 67]. Cela a aussi été observé numériquement [68, 69]. Le train d'ondes se décompose en  $p$  ondes solitaires rangées par amplitude décroissante et qui se propagent à des vitesses différentes (cf. Fig. II.10). L'amplitude maximale de chaque onde diminue comme  $F_p \propto \exp(-\alpha p)$  où  $\alpha$  est une fonction du rapport  $M_0/M$ . Il est à noter que cette décomposition se produit sur une distance environ égale à la largeur d'une onde solitaire, soit quelques grains. Dans [67], Job *et coll.* donnent deux conditions nécessaires pour obtenir une unique onde solitaire : il faut qu'il y ait juste une seule collision entre la bille impactante et la première bille de la chaîne et que le temps de la collision soit inférieure à la durée typique de l'onde. Effectivement, Shukla

[70] a noté que si la durée de l'onde est trop grande, le pulse initial se décompose en une série de pulses.



**FIG. II.10** – Décomposition du pulse initial en un train de pulses. La chaîne est constituée de 7 billes de rayon 13 mm suivie de 50 billes de rayon 6.5 mm. A l'interface entre les deux types de sphères, l'onde solitaire initiale (a) se décompose en un train d'ondes solitaires rangées par ordre croissant (b,c). Sur (d), on voit clairement que les différents pulses se propagent à des vitesses de plus en plus petites. Tiré de Job et coll. [67].

Ces différentes études s'intéressaient à des chaînes homogènes constituées de grains identiques. On peut imaginer que toute hétérogénéité présente dans la chaîne va perturber la propagation de l'onde solitaire. De nombreuses études s'intéressent désormais au comportement d'une onde solitaire à l'interface entre deux « vides soniques » [71, 72, 73, 74], à la réflexion de l'onde sur une paroi fixe [75, 76] ou à l'interaction de l'onde solitaire avec une impureté [77, 78]. D'autres travaux ont mis en évidence qu'un arrangement particulier de grains de différents rayons dans une chaîne (nommée *tapered chains*, *decorated chains*) pouvait servir à atténuer l'onde [79, 80, 81]. Récemment, Daraio s'est intéressée à la propagation d'ondes dans des chaînes « diatomiques »<sup>8</sup>, c'est-à-dire composée de grains de deux natures

8. Par analogie avec le problème de physique du solide considérant la propagation de phonons dans des cristaux constitués de deux types d'atomes.

différentes. Elle a étudié le régime linéaire [82, 83, 84] et le régime non-linéaire [85] pour une chaîne « diatomique » périodique. Elle a mis en évidence l'existence des modes acoustiques et optiques, la présence d'une bande de fréquences interdite et la capacité de ces chaînes à supporter la propagation d'ondes solitaires. Dernièrement, elle a étudié le cas d'une chaîne « diatomique » et désordonnée [86] où elle a observé que les propriétés de l'onde n'étaient pas les mêmes en fonction du taux de désordre.

Des études se sont intéressées numériquement et expérimentalement à la propagation d'ondes non-linéaires dans des matériaux présentant une double loi de puissance [87, 88]. Ce changement dans la loi d'interaction a pour conséquence majeure que le profil de l'onde dépend de son amplitude, ce qui est tout à fait différent du comportement de l'onde solitaire originale de Nesterenko.

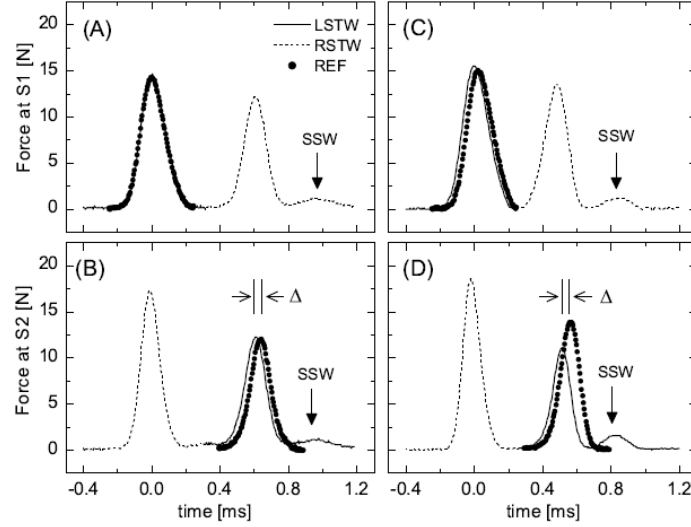
A noter enfin une étude de Santibanez *et coll.* traitant du croisement de deux ondes solitaires générées chacune aux deux extrémités de la chaîne [89]. Les auteurs ont montré qu'après leur croisement, il apparaissait derrière chacune des deux ondes principales une deuxième onde solitaire (appelée SSW sur la Fig. II.11) de faible amplitude. Ceci avait été prévu par Manciu, Sen et Hurd [90]. Ils ont aussi constaté que chacune des ondes solitaires parcouraient la distance totale de la chaîne plus rapidement que ne le ferait une unique onde solitaire sans interaction. Ils ont montré que ce décalage  $\Delta$  variait comme  $F_m^{-1/6}$ .

## **II.2 Ondes sonores dans des empilements bi- et tridimensionnels**

### **II.2.1 Théorie des milieux effectifs**

Le contact de Hertz sert de point de départ pour la modélisation de l'élasticité macroscopique d'un empilement granulaire. Nous nous sommes intéressés précédemment à la propagation d'excitations dans une chaîne unidimensionnelle de sphères. On a modélisé cette chaîne par une association en série de ressorts vérifiant la loi de Hertz. La non-linéarité de cette loi est responsable de la dépendance de la vitesse des ondes avec la force statique de confinement  $F_0$  et l'amplitude de l'onde  $F_m$ . Les résultats expérimentaux, aussi bien en régime linéaire qu'en régime non-linéaire, sont en excellent accord avec ce modèle, excluant ainsi le recours à des lois de contact autres que celle de Hertz.

---



**FIG. II.11** – Croisement de deux ondes solitaires dans une chaîne de grains, l’une se propageant de gauche à droite (LSTW) et l’autre se propageant de droite à gauche (RSTW). La colonne de gauche (A et B) correspond à une chaîne de 25 grains et celle de droite (C et D) à une chaîne de 26 grains. La force est mesurée par un capteur monté sur la bille (A) 9; (B) 17; (C) 10; et (D) 17. Les points (•) correspondent à une unique onde solitaire se propageant de gauche à droite. Il apparaît que lorsque deux ondes interagissent, elles parcourent la chaîne plus rapidement qu’une onde solitaire unique. Cette avance temporelle est notée  $\Delta$ . Après le croisement, on observe aussi l’apparition d’une seconde onde solitaire SSW. Figure tirée de Santibanez et coll. [89].

Il nous faut désormais arriver à passer de l’élasticité d’un contact à l’élasticité d’un ensemble de grains. Pour assurer le passage d’un seul contact à un réseau de contacts, on peut utiliser une théorie de milieux effectifs [91]. Cette théorie considère tous les grains comme identiques et néglige les fluctuations de forces, de densité et de nombre de contacts pour les différents grains. L’élasticité du milieu est régie par la raideur individuelle d’un contact  $\kappa$  et par le nombre moyen  $Z_0$  de contacts par grain (la *coordinance*). Cette théorie permet de trouver une expression des modules effectifs de compression  $K$  et de cisaillement  $\mu$  de l’échantillon [92] :

$$K, \mu \propto (\phi Z_0)^{2/3} P^{1/3} \quad (\text{II.49})$$

où  $\phi$  est la fraction volumique et  $P$  la pression de confinement macroscopique.

La vitesse des ondes de compression  $V_p$  et celle des ondes de cisaillement  $V_s$  sont reliées

aux propriétés élastiques de la façon suivante<sup>9</sup> :

$$V_p = \sqrt{\frac{K + 4/3\mu}{\rho}} \quad (\text{II.50})$$

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (\text{II.51})$$

où  $\rho$  est la masse volumique.

Des équations II.49 et II.51, on en déduit l'évolution de la vitesse des ondes avec la pression de confinement dans un empilement granulaire :

$$V_p, V_s \propto P^{1/6} \quad (\text{II.52})$$

Cette théorie prévoit donc que la vitesse des ondes acoustiques suit l'exposant hertzien 1/6 pour des empilements bi- et tridimensionnels. Les résultats expérimentaux portant sur des empilements ordonnés [55, 91, 93, 94] et désordonnés [56, 95] montrent une déviation aux faibles contraintes par rapport à la puissance hertzienne (Figs. II.12 et II.13). De plus, la force pour laquelle a lieu la transition entre ces deux régimes varie largement avec la configuration initiale de l'empilement [55, 93].

De façon surprenante, l'exposant que l'on peut mesurer aux faibles pressions est le même dans les différentes expériences et ne semble pas dépendre de l'empilement. On peut donc résumer ces observations par :

$$\text{Vitesse} \propto F_0^\beta \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \beta = 1/4 & \text{pour les « faibles » forces} \\ \beta = 1/6 & \text{pour les « grandes » forces} \end{cases} \quad (\text{II.53})$$

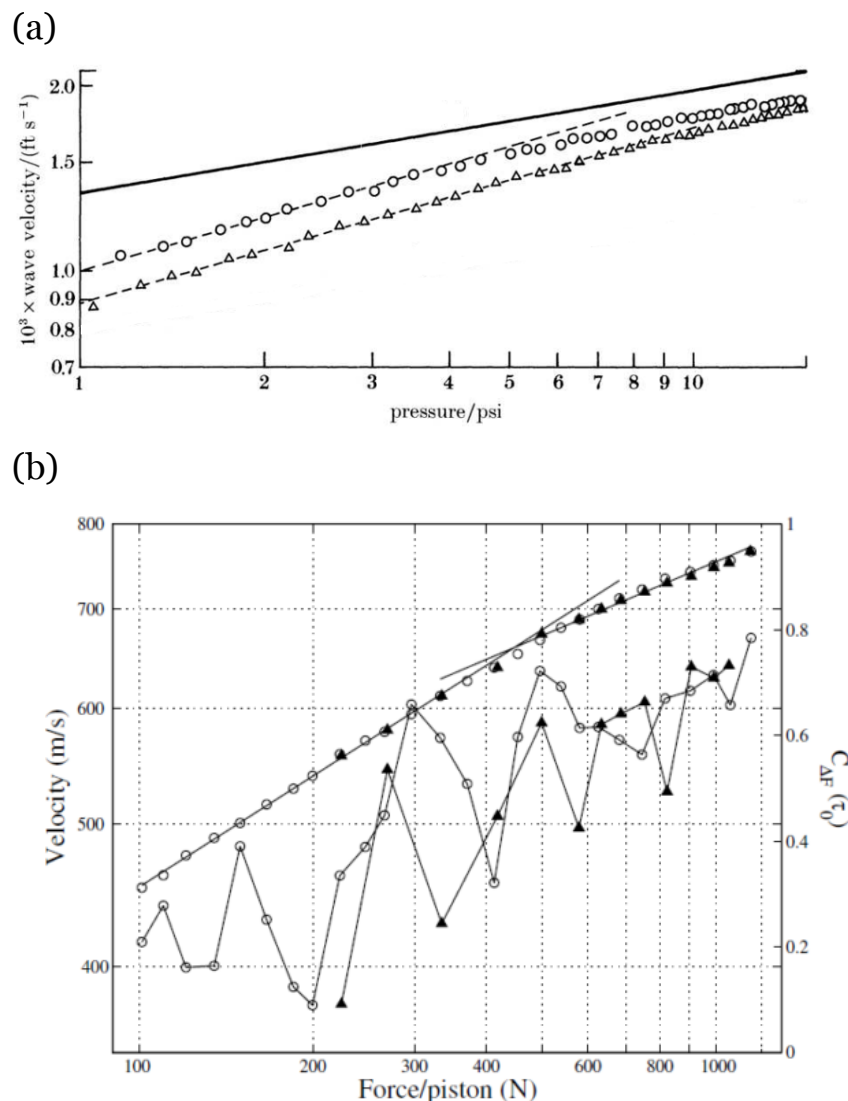
Un même désaccord a été observé dans les mesures de Travers *et coll.* sur la compressibilité statique  $K$  d'un empilement bidimensionnel de cylindres [96].

## II.2.2 Activation des contacts

Nous avons vu précédemment que nous ne pouvions pas invoquer des lois de contact non-hertziennes pour expliquer cette déviation. Le désordre du réseau de contacts est donc le seul

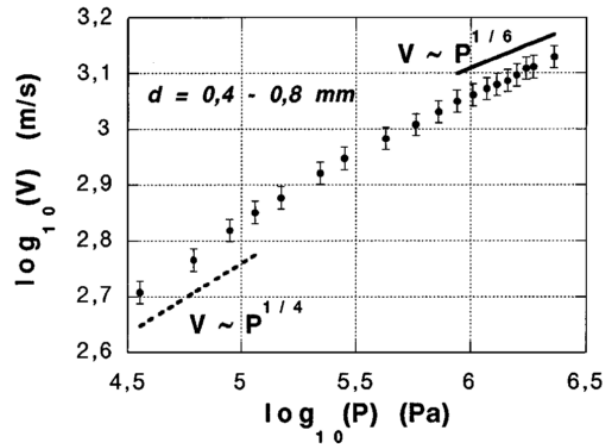
---

9. On voit ici que les mesures acoustiques sont un outil très précieux pour mesurer *in situ* les modules élastiques d'un matériau granulaire.



**FIG. II.12** – Vitesse des ondes acoustiques en fonction de la force de confinement pour des empilements ordonnés bi- et tridimensionnels. (a) Empilement 3D avec un arrangement cubique à faces centrées (expérience originale de Duffy et Midlin dans [91], courbe extraite de [54]). Le trait plein a un exposant  $1/6$  et les pointillés ont un exposant  $1/4$ . (b) Empilement 2D avec un arrangement hexagonal : mesures de Coste et Gilles [55]. L'évolution de la vitesse avec la force de confinement suit une loi de puissance mais avec deux exposants différents aux petites forces et aux grandes forces. La transition pour la courbe de vitesse (axe des ordonnées à gauche) entre les deux puissances  $1/6$  et  $1/4$  a lieu à 350 N. Cette force de transition dépend de la configuration initiale de l'empilement. Les mesures de la vitesse et de corrélation (axe des ordonnées de droite) sont exactement identiques suivant qu'on augmente ( $\circ$ ) ou qu'on diminue ( $\blacktriangle$ ) progressivement la force.



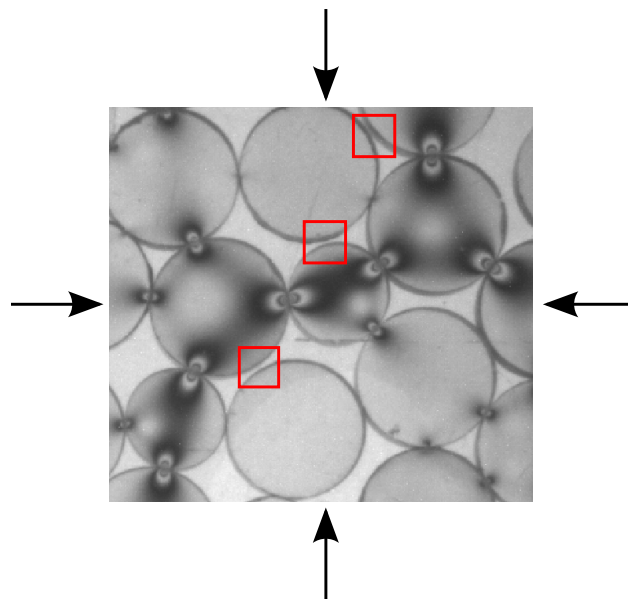


**FIG. II.13** – Vitesse des ondes acoustiques en fonction de la force de confinement pour des empilements désordonnés tridimensionnels. Tiré de Jia et coll. [56].

candidat pour expliquer la puissance  $1/4$ . Le point de départ de cette approche consiste là aussi à tenir compte des imperfections inévitables de tous empilements granulaires : puisque les contacts entre grains sont quasi-pontuels, une petite imperfection de taille ou de forme fait que certains contacts sont en fait rompus (Fig. II.14). On distingue donc les contacts actifs, ceux où les grains se touchent réellement, des autres contacts où les grains ne se touchent pas<sup>10</sup>. Ainsi le réseau des contacts, par l'intermédiaire duquel les forces et les ondes sont transmises, est désordonné même si le réseau du centre des grains est parfaitement ordonné. La compressibilité effective de l'empilement diffère alors de ce que la loi de Hertz prédit à cause de ces subtils effets collectifs, même si tous les contacts pris individuellement vérifient la loi de Hertz. Des études numériques et expérimentales [37, 97, 98, 99] ont montré l'influence d'une fluctuation des rayons sur la compressibilité d'un échantillon granulaire. Mis à part le cas où tous les grains ont le même rayon, la relation entre la force appliquée et la déformation macroscopique ne suit pas la même loi que celle reliant la force et la déformation à l'échelle d'un contact. Le même phénomène a été observé expérimentalement pour la conductivité d'un empilement de cylindres conducteurs [37].

Cela suggère que les propriétés élastiques d'un empilement de grains sont régies pour une partie par le désordre de l'empilement et pour une autre partie par l'élasticité des contacts. On peut imaginer le scénario suivant lorsque la force de compression augmente : lorsque la force est appliquée, les grains se déforment au niveau des contact actifs préexistant. Chacune de ces déformations est régie par la loi de Hertz. De plus, en même temps que la

10. Et qui ne sont donc pas vraiment des contacts puisque les grains ne se touchent pas.



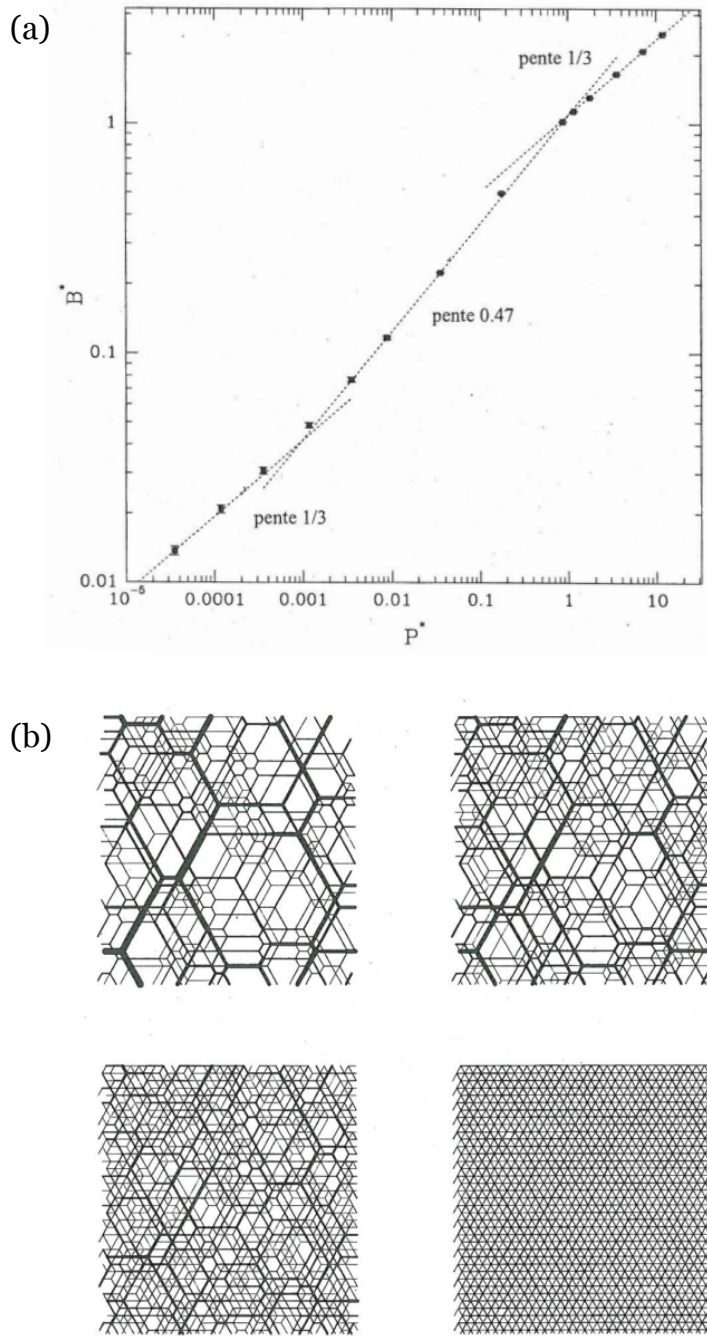
**FIG. II.14** — Un empilement granulaire est comprimé par une force extérieure. On distingue, sur cette image de grains photoélastiques, les contacts « actifs » qui supportent la charge et les « contacts passifs », qui sont encadrés, où les grains ne se touchent pas (c'est donc un abus de langage de parler de contact !). Lorsque la force extérieure augmente, certains de ces grains vont se mettre à se toucher créant ainsi de nouveaux contacts. On parle d'activation de nouveaux contacts. L'élasticité du milieu va dépendre de l'élasticité des contacts individuels et de l'augmentation du nombre total de contacts. De cette manière, l'élasticité macroscopique de l'empilement peut être différente de l'élasticité individuelle d'un seul contact et ne pas suivre ainsi la loi de Hertz.

force augmente, de nouveaux contacts apparaissent<sup>11</sup>. On parle d'activation des contacts. A leur tour, ces nouveaux contacts actifs vont supporter une déformation donnée par la loi de Hertz. Aux très grandes forces, tous les contacts sont actifs et le désordre des contacts n'intervient plus dans le comportement macroscopiques de l'échantillon<sup>12</sup>.

J.N. Roux [26] a simulé un empilement granulaire 2D de sphères, rangées sur un réseau triangulaire, de diamètre variable  $2R(1 - \alpha)$  avec  $\alpha \ll 1$ . Il a mis en évidence l'augmentation du nombre de contacts actifs lorsque la compression augmente (Fig. II.15.b). Tous les contacts sont actifs pour une pression  $P \propto ER\alpha^{3/2}$ . Il calcule aussi [101] la compressibilité

11. Cela n'est absolument pas pris en compte dans la théorie des milieux effectifs qui suppose un nombre moyen de contacts  $Z_0$  indépendant de la force de compression.

12. Roux [100] a simulé un réseau régulier 2D de diodes Zener. La tension seuil des diodes est distribuée aléatoirement. La dispersion des tensions d'activation des diodes est l'analogue de la dispersion des rayons pour l'activation des contacts. Lorsque toutes les diodes ne sont pas activées, on observe une déviation de la caractéristique électrique du réseau par rapport à la caractéristique d'une diode.



**FIG. II.15** — (a) : Compressibilité effective  $B^*$  d'un empilement triangulaire 2D de sphères élastiques en fonction de la pression de confinement  $P^*$ . (b) : Activation des contacts dans le même réseau triangulaire de grains pour des pressions de confinement  $P^*$  croissantes (de gauche à droite et de haut en bas). L'épaisseur du trait est proportionnelle à la force supportée par le contact. Pour les grandes pressions de confinement, tous les contacts sont actifs et le système devient homogène. Les deux courbes sont des résultats de J.N. Roux [101, 26].

effective  $B^*$  et montre qu'il existe trois régimes, ce qui apparaît sur la Fig. II.15.a. Une première zone, aux faibles pression de confinement, évolue avec un exposant hertzien de  $1/3$ , suivie d'une zone non-Hertzienne à des contraintes intermédiaires. Si la contrainte augmente encore, on retrouve un comportement hertzien. Aux faibles contraintes, la compression est encaissée par un nombre restreint de contacts qui évoluent chacun suivant la loi de Hertz. Lorsque la contrainte augmente, elle a un nouvel effet sur l'empilement : elle active de nouveaux contacts et la compressibilité n'évolue plus suivant une loi hertzienne. Aux grandes forces, tous les contacts sont actifs et on retrouve le comportement hertzien. Cette simulation souligne le rôle joué par les activations successives des contacts sur l'élasticité macroscopique de l'empilement.

Notons que si l'on prend en compte l'augmentation de la coordinance dans la théorie des milieux effectifs, celle-ci donne des résultats en bien meilleur accord avec les résultats expérimentaux [92, 102]. De nombreuses études se focalisent depuis sur le rôle du désordre sur la propagation des ondes [103, 104].

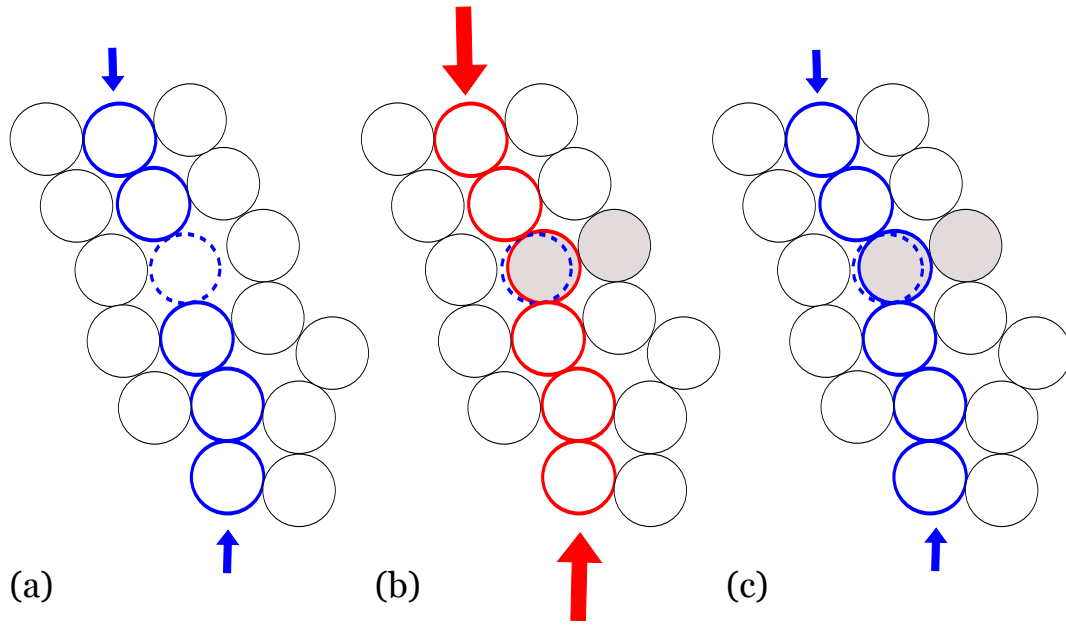
### II.2.3 Origine physique de l'activation des contacts

Quelle est l'origine physique de l'activation de ces contacts ? Deux mécanismes peuvent être invoqués.

Pour le premier mécanisme, Goddard suppose que l'activation des contacts provient du flambage des chaînes de forces [54]. Lorsque la force exercée sur une chaîne de force augmente et si la force latérale exercée par les grains voisins n'est pas suffisante, cette chaîne est instable et va flamber. Certains grains constituant la chaîne de force vont se déplacer perpendiculairement à la direction de la compression. Ils ne subissent pas (ou peu) de déformation supplémentaire dans la direction de la compression mais un déplacement perpendiculaire à cette direction. Lors de ce faible déplacement, des grains qui n'étaient pas initialement en contact, vont se mettre à se toucher (Fig. II.16). Ce mécanisme est *irréversible*.

Pour le deuxième mécanisme, c'est la déformation élastique des billes elles-mêmes qui assurent la fermeture des contacts [26, 95]. En effet, lorsqu'un grain est comprimé dans une direction, il s'étire dans la direction perpendiculaire créant ainsi de nouveaux contacts avec des grains initialement trop éloignés. Ce processus d'activation est *réversible*.

La question de la *réversibilité* du réseau est donc cruciale pour choisir entre ces deux

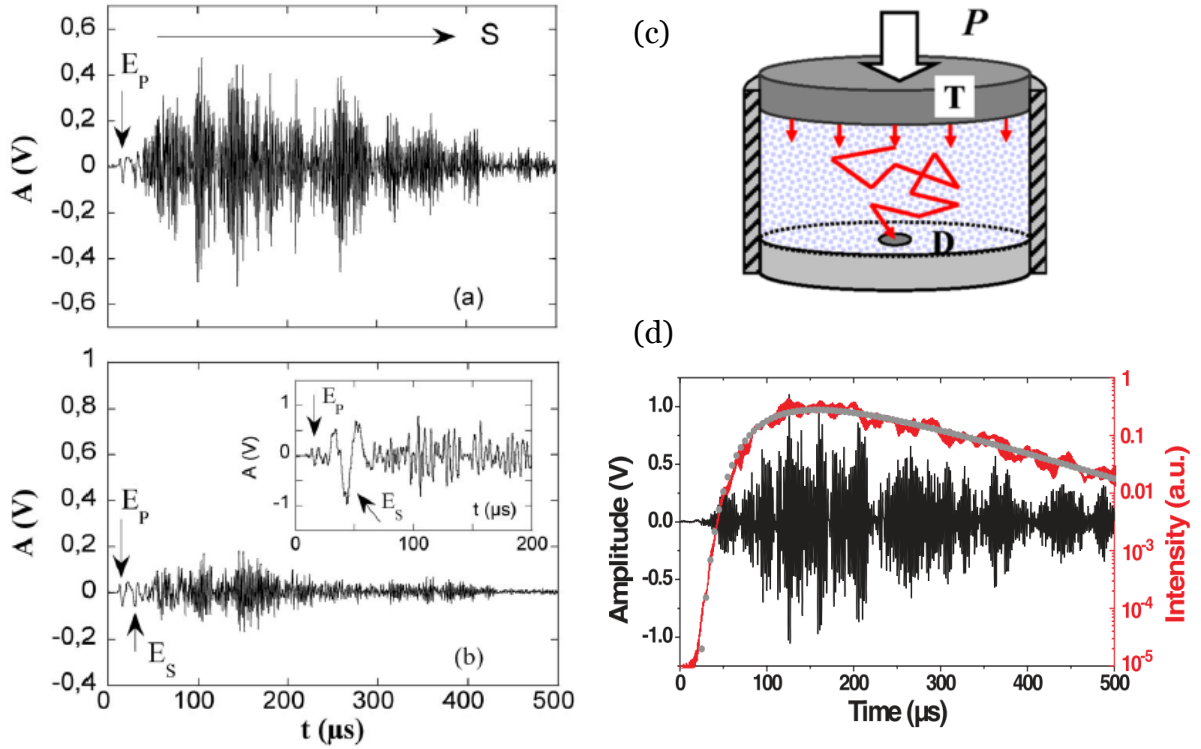


**FIG. II.16** – Mécanisme d'activation de nouveaux contacts grâce au flambage des chaînes de forces. (a) : Une chaîne de force (en bleu et en trait gras) soutient la force appliquée. (b) : Lorsque la force augmente, la chaîne va flamber : le grain en pointillés se déplace dans la direction perpendiculaire à la droite qui joint les centres des grains adjacents. Lors ce ce petit déplacement, ce grain va se mettre à toucher son voisin. Les deux grains apparaissent alors gris. (c) : Lorsque la force diminue, le grain ne reprend pas sa position initiale et le contact est maintenu. Ce mécanisme d'activation de nouveaux contacts est irréversible.

mécanismes. Coste et Gilles [55, 93] ont mesuré la vitesse des ondes dans un réseau hexagonal de billes identiques en augmentant ou en diminuant progressivement la force de confinement. Ils ont de même mesuré les corrélations des signaux mesurés pour deux forces  $F$  et  $F + \Delta F$ , là aussi en augmentant puis en diminuant la force (Fig. II.12). Ces résultats montrent que les points obtenus lorsqu'on augmente et diminue la force  $F$  se superposent. La reproductibilité des mesures indique que le réseau des contacts évolue de façon *réversible*. Cette étude suggère que le recrutement des contacts est dû aux déformations élastiques des grains plutôt qu'au flambage des chaînes de forces.

## II.2.4 Diffusion multiple des ondes élastiques dans les milieux granulaires

La discussion du paragraphe précédent sur la vitesse des ondes dans des empilements bi- et tridimensionnels concernent les ondes de grande longueur d'onde, encore appelées ondes



**FIG. II.17** – (a) : Signal ultrasonore mesuré dans un empilement tridimensionnel désordonné. Le signal est composé d'une partie cohérente  $E$  et d'une onde multiplement diffusée  $S$ . (b) : Signal moyenné sur 15 expériences indépendantes. Le moyennage diminue drastiquement la composante  $S$  du signal. Cela met en évidence l'extrême sensibilité de cette onde à la configuration microscopique de l'empilement. (c) : Schéma illustrant la propagation des ondes incohérentes dans l'empilement granulaire. Ces trois schémas sont tirés de Jia [106]. (d) : Amplitude de l'onde mesurée par le détecteur et intensité transmise. La courbe d'intensité s'ajuste parfaitement à un modèle de diffusion (point gris). Tiré de Brunet et coll. [107].

*cohérentes*. Lorsque la longueur d'onde diminue (ce qui est équivalent à dire que la fréquence augmente) et devient comparable à la taille des grains, le signal mesuré est constitué de deux parties [105, 56] : une onde basse fréquence appelée onde cohérente (notée  $E$ ) et une composante haute fréquence appelée onde diffusée (notée  $S$ ). Cela est illustré Fig. II.17. La différence essentielle entre ces deux ondes est leur sensibilité à la configuration initiale de l'empilement.

L'onde cohérente  $E$  n'est pas sensible à l'arrangement précis des grains et par conséquent est tout à fait reproductible pour des expériences différentes avec les mêmes paramètres macroscopiques. Elle reflète les propriétés moyennes de l'empilement. C'est sur cette onde

cohérente que les mesures de vitesse dont on a longuement discutées sont effectuées.

En revanche, l'onde S est extrêmement sensible à l'organisation microscopique de l'empilement et les signaux sont tout à fait différents pour des expériences indépendantes avec les mêmes paramètres macroscopiques. Cette composante du signal correspond à l'ensemble des ondes diffusées par les nombreuses hétérogénéités du réseau des contacts. Ces ondes constituent donc un outil particulièrement sensible pour sonder le désordre dans un empilement granulaire. L'extrême sensibilité de cette onde S avec le désordre du réseau de contacts a aussi été mise en évidence par Coste et Gilles ([55, 93]) lors des mesure de corrélation des signaux.

Jia [106] a montré que le transport de ces ondes diffusées pouvait être décrit par une équation de diffusion scalaire. Il extrait de ce modèle le facteur de dissipation  $Q^{-1}$  et une distance de libre parcours moyen  $l^* \propto d$  où  $d$  est la taille d'un grain. Il l'interprète comme la longueur de corrélation des chaînes de forces. Le fait que cette longueur de corrélation soit de l'ordre d'un grain va à l'encontre de résultats établis [1, 2]. L'étude de ces ondes diffusées est un moyen très efficace pour sonder les causes de dissipation dans des empilements granulaires secs et mouillés [107] et étudier les réarrangements dynamiques des grains [108].

### **II.2.5 Ondes élastiques de rotation**

Dans la modélisation que nous avons faite de l'élasticité d'un milieu granulaire (aussi bien pour le 1D que le 2D et le 3D), nous n'avons pas pris en compte les éventuelles rotations des grains sur eux-mêmes. En effet, de même qu'on envisage les degrés de liberté de translation, on pourrait envisager les degrés de liberté de rotation. De récents travaux ont étudié comment la prise en compte de la rotation des grains modifie la propagation des ondes [109, 110, 111]. Nous ne rentrerons pas davantage dans cette discussion.

## **II.3 L'originalité de notre approche**

Nous avons vu dans ce chapitre que la propagation d'ondes sonores dans les massifs granulaires présentent des caractéristiques étonnantes et encore mal comprises. Ces caractéristiques sont liées à la nature même de l'empilement : la non-linéarité de la loi de contact entre les grains et le désordre inhérent à l'empilement en sont les deux ingrédients majeurs. Depuis

---

une vingtaine d'années, de nombreuses études s'intéressent à ces questions. La complexité des phénomènes mis en jeu nécessite d'aborder ce sujet avec des systèmes simplifiés au laboratoire.

Durant ma thèse, j'ai étudié la propagation d'ondes en régime linéaire et non-linéaire dans des empilements 1D et 2D. L'originalité de notre étude est d'utiliser des grains photoélastiques, ce qui offre la possibilité de visualiser la propagation de l'onde *in situ* dans le milieu. Pour mettre en oeuvre cette technique, il est plus aisé d'utiliser des grains de forme cylindrique. Cela donne aussi la possibilité de tester une loi de contact différente à la loi de Hertz pour les sphères. Je présente les résultats expérimentaux dans les Chapitres IV, V et VI. Avant cela, le chapitre III présente la loi de contact pour les grains cylindriques et le traitement d'images nécessaire pour déduire des informations quantitatives à partir des images photoélastiques.





# Chapitre III

## Les grains cylindriques : loi de contact et calibration photoélastique

### Sommaire

---

<b>III.1 Le contact entre des cylindres . . . . .</b>	<b>56</b>
III.1.1 Détermination <i>a priori</i> des paramètres du contact . . . . .	56
III.1.2 Compressibilité de deux cylindres en contact le long d'une génératrice commune . . . . .	57
III.1.3 Un modèle de compression d'un cylindre . . . . .	60
<b>III.2 Fabrication des grains cylindriques . . . . .</b>	<b>62</b>
<b>III.3 Mesure des lois « <math>F - S</math> » et « <math>F - \delta</math> » pour des cylindres . . .</b>	<b>66</b>
III.3.1 Le dispositif expérimental . . . . .	66
III.3.2 Relation expérimentale « $F_0 - S$ » . . . . .	68
III.3.3 Relation expérimentale « $F_0 - \delta$ » . . . . .	72
III.3.4 Résumé . . . . .	77
<b>III.4 La photoélasticité . . . . .</b>	<b>78</b>
<b>III.5 La calibration photoélastique . . . . .</b>	<b>81</b>

---

Nous devons constater que jusqu'à aujourd'hui, la quasi totalité des études quantitatives faites sur la propagation d'excitations sonores dans des empilements granulaires concernent des grains sphériques en contact de Hertz. Expérimentalement, de nombreux matériaux aux propriétés physiques différentes ont été utilisés pour tester les alternatives à la loi de Hertz (cf. Chap. II) mais il s'agissait toujours de grains de formes sphériques<sup>1</sup>. Nous avons décidé de changer la forme des grains pour tester une nouvelle loi de contact et voir comment se généralisent les résultats obtenus pour des sphères.

Dans toutes les expériences réalisées durant cette thèse, les empilements utilisés sont constitués de grains photoélastiques de formes cylindriques. La relation entre la force appliquée  $F$  et la déformation  $\delta$  ne sera plus donnée par la loi de Hertz (Eq. I.18), ce qui va modifier les propriétés de la propagation de l'onde. De plus, le choix du matériau photoélastique va nous permettre, à l'aide d'un montage optique adapté, de suivre l'onde en temps réel et en tous points du système.

## III.1 Le contact entre des cylindres

Au paragraphe I.5, nous nous sommes intéressés au contact entre deux sphères identiques de rayon  $R$ . Nous allons maintenant aborder le contact entre deux cylindres de rayon  $R$  et de longueur  $L$ . Le contact initial<sup>2</sup> ne se fait pas suivant un point comme pour les sphères mais s'opère suivant une ligne parallèle aux axes des cylindres. Sous compression, la surface de contact est une bande rectangulaire de longueur  $L$  et de largeur  $2a$  (Fig. III.1). Naturellement, cette largeur dépend de la force  $F$  appliquée.

### III.1.1 Détermination *a priori* des paramètres du contact

Nous allons reprendre le raisonnement géométrique comme nous l'avons fait pour le contact entre deux sphères au § I.5.2. L'équation I.7, qui relie la taille de la zone de contact à la pression  $p$  s'y exerçant, est toujours valable. Repartons de cette équation :

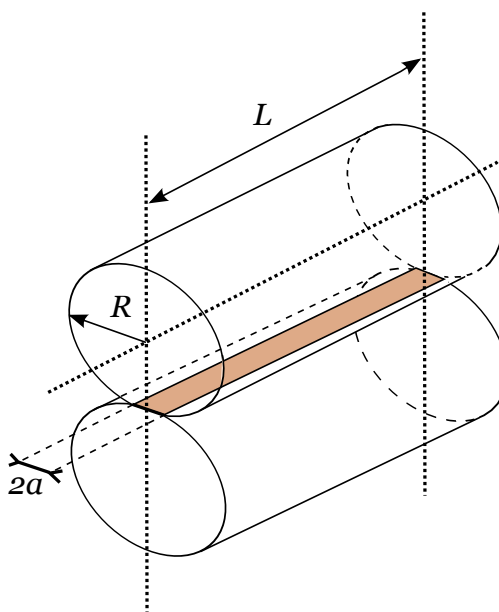
$$a \propto \frac{2pR}{E} \quad (\text{III.1})$$

---

1. Très récemment, un article est paru portant sur la propagation de solitons dans une chaîne unidimensionnelle d'ellipsoïdes en contacts [112].

2. Le contact initial correspond à la situation où les deux corps sont tout juste au contact mais sans être encore comprimés l'un contre l'autre.

---



**FIG. III.1** – Schéma illustrant le contact entre deux cylindres de rayon  $R$  et de longueur  $L$ . Pour des cylindres, le contact initial est une ligne et non pas un point comme pour les sphères. Sous compression, la zone de contact est une bande rectangulaire de longueur  $L$  et de largeur  $2a$ .

Dans le cas du contact entre deux cylindres, la taille  $a$  représente la demi-largeur de la bande de contact. La pression s'y exerçant est reliée à la force de compression  $F$  par :

$$F = 2aLp \quad (\text{III.2})$$

On en déduit que la demi-largeur du contact vaut :

$$a \propto \left( \frac{RF}{LE} \right)^{1/2} \quad (\text{III.3})$$

La surface de contact  $S$  augmente donc de façon non-linéaire avec la force de compression  $F$ , comme  $S \propto \sqrt{F}$ . Pour des sphères, la surface varie comme  $S \propto F^{2/3}$ . On voit clairement ici que la géométrie des corps en contact influe sur les paramètres du contact.

### III.1.2 Compressibilité de deux cylindres en contact le long d'une génératrice commune

Afin de trouver le champ de déplacement associé au contact entre deux grains, nous avons vu qu'il faut considérer le grain comme un demi-espace élastique infini et y appliquer les équations de l'élasticité. Considérons alors un demi-espace élastique soumis à un chargement

bidimensionnel suivant une ligne. Soit  $P$  la force par unité de longueur. On trouve que le déplacement normal des points situés à la surface vaut [50] :

$$u = 2 \frac{1 - \nu^2}{\pi E} P \ln r + C^{ste} \quad (\text{III.4})$$

où  $P$  est la force par unité de longueur et  $C^{ste}$  une constante d'intégration.

Il est à noter que le champ de déplacement varie en  $\ln r$ . Pour un contact initialement ponctuel (cas des sphères), le champ de déplacement varie comme  $r^{-1}$ . Il est alors très aisé de déterminer la constante  $C^{ste}$  en prenant un point loin du contact  $r \rightarrow \infty$ . Dans le cas des cylindres, la dépendance de  $u$  en  $\ln r$  nécessite de connaître la déformation globale des corps loin de la zone de contact pour déterminer la constante  $C^{ste}$ . On ne peut donc pas déterminer de façon univoque le champ de déplacement sans tenir compte des déformations globales des corps considérés. Il faut donc utiliser un modèle de distribution des contraintes au sein des corps pour lever cette indétermination. On le fera au prochain paragraphe. Toutefois, on peut d'ores et déjà prédire la distribution de pression dans le zone de contact et l'expression analytique de la largeur  $a$  de la surface de contact [50].

Les considérations géométriques du contact entre deux grains (§ I.5) nous a amené à la conclusion suivante :

$$\delta - 2u = \frac{x^2}{R} \quad (\text{III.5})$$

où  $u$  est le déplacement des points de la surface et  $x$  la distance par rapport à l'axe  $z'$ .

On différencie l'équation précédente, il vient :

$$2 \frac{\partial u}{\partial x} = -2 \frac{x}{R} \quad (\text{III.6})$$

Or la théorie de l'élasticité prédit que pour un demi espace infini chargé sur une bande comprise entre  $-a < x < a$  par une pression  $p(x)$ , on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2(1 - \nu^2)}{\pi E} \int_{-a}^{+a} \frac{p(s)}{x - s} ds \quad (\text{III.7})$$

En rapprochant les deux équations précédentes, on trouve :

$$\int_{-a}^{+a} \frac{p(s)}{x - s} ds = \frac{\pi E x}{2(1 - \nu^2) R} \quad (\text{III.8})$$

Une solution de cette équation est :

$$p(x) = -\frac{\pi E}{2(1 - \nu^2) R} \frac{x^2 - a^2/2}{\pi (a^2 - x^2)^{1/2}} + \frac{P}{\pi (a^2 - x^2)^{1/2}} \quad (\text{III.9})$$

Cette équation donne l'expression de la pression au niveau de la zone de contact en fonction de la demi-largeur  $a$  de la bande de contact. Mais  $a$  est une inconnue dont il faut trouver l'expression.

Remarquons d'abord que la pression doit être positive, donc :

$$P \geq \frac{\pi E a^2}{4(1 - \nu^2) R} \quad (\text{III.10})$$

De plus, il est facile de voir que si  $P$  excède la valeur donnée par l'équation précédente, alors :

$$p(x) \cong \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty \quad (\text{III.11})$$

Il est possible de montrer qu'une telle divergence induit que le gradient de la surface en ce point est infini. Un tel profil est à exclure dans le cadre des hypothèses que nous avons précédemment faites. La seule conclusion possible est que :

$$P = \frac{\pi E a^2}{4(1 - \nu^2) R} \quad (\text{III.12})$$

On trouve donc l'expression de la demi-largeur de la zone de contact en fonction de  $P$  :

$$a = \sqrt{\frac{4(1 - \nu^2) P R}{\pi E}} \quad (\text{III.13})$$

En notant que  $P = F/L$ , on en déduit l'expression de la surface de contact  $S$  entre deux cylindres comprimés :

$$S = \sqrt{\frac{16(1 - \nu^2) R L F}{\pi E}} \quad (\text{III.14})$$

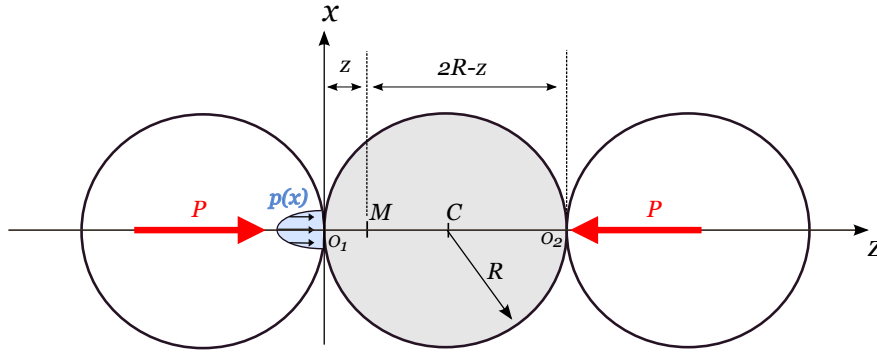
On retrouve bien la même loi d'échelle que celle obtenue à l'équation III.3. Dans la suite, on nommera la relation entre la force de compression  $F$  et la surface de contact  $S$  par l'abréviation suivante : loi «  $F - S$  ».

On en déduit également l'expression de la distribution de la pression à l'intérieur de la zone de contact :

$$p(x) = \frac{2P}{\pi a} \left[ 1 - \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{III.15})$$

### III.1.3 Un modèle de compression d'un cylindre

Comme nous l'avons souligné précédemment, il n'est pas possible de donner une relation explicite entre le chargement  $P$  et l'écrasement  $\delta$  des cylindres sans tenir compte de la forme globale des corps en contact et des conditions aux limites. Nous considérons ici le cas de la compression d'un cylindre par deux autres cylindres identiques placés de part et d'autre du cylindre central (figure III.2). Nous reprenons la démonstration trouvée dans [50].



**FIG. III.2** – *Contact entre trois cylindres.*

La force de compression par unité de longueur  $P$  induit une distribution Hertzienne de la pression au niveau de la surface de contact donnée par l'équation III.15. La contrainte engendrée par deux forces diamétralement opposées sur un cylindre est donnée [48] sous la forme d'une contrainte biaxiale uniforme :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \frac{P}{\pi R} \quad (\text{III.16})$$

On fait maintenant l'hypothèse que l'état de contrainte en un point  $M(0, 0, z)$  du cylindre, situé sur l'axe  $z$  entre le centre  $C$  et le point de chargement  $O_1$  est la somme de trois contributions :

- une contrainte due à la pression Hertzienne de contact donnée par l'équation III.15
- une contrainte biaxiale donnée par l'équation III.16
- une contrainte due au contact au point  $O_2$  qui peut être considérée comme étant due à la force de compression  $P$  localisée

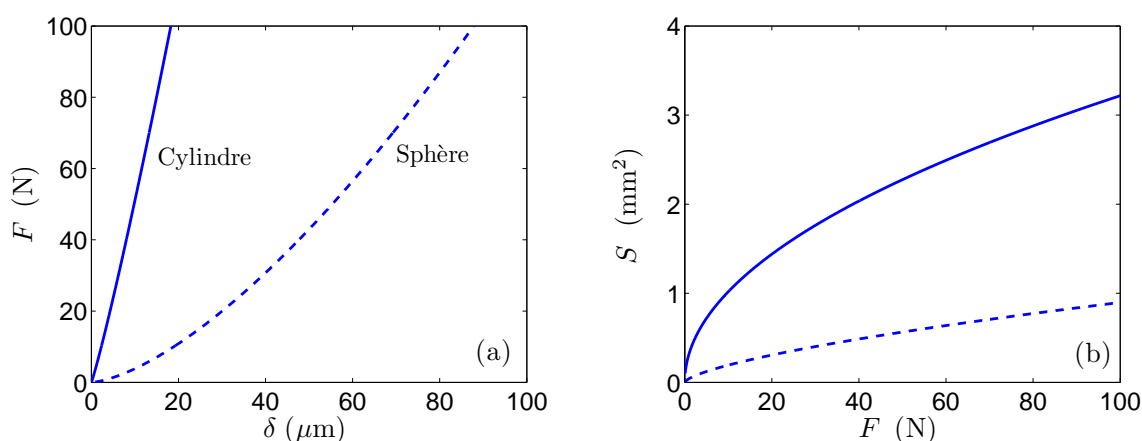
Les calculs sont détaillés dans l'annexe B.

Ce modèle donne la relation entre la force de compression  $F$  et l'écrasement  $\delta$  du cylindre :

$$\delta = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{2F}{L} \left[ \ln \left( \frac{4\pi ERL}{(1 - \nu^2) F} \right) - 1 \right] \quad (\text{III.17})$$

Dans la suite, la relation entre la force  $F$  et la déformation  $\delta$  sera souvent abrégée par la formule suivante : Loi «  $F - \delta$  ».

Cette expression montre que la relation entre la force  $F$  et la distance d'interpénétration  $\delta$  n'est pas linéaire. Toutefois, ce n'est pas une loi de puissance comme c'est le cas pour le contact entre deux sphères. Nous avons voulu comparer les paramètres de contact pour deux sphères et deux cylindres de taille similaire. Nous envisageons le cas de grains en polycarbonate ( $E = 2.76$  GPa et  $\nu = 0.38$ ) de rayon  $R = 6.5$  mm pour les sphères et de rayon  $R = 6.5$  mm et longueur  $L = 10$  mm pour les cylindres. Les résultats sont représentés Fig. III.3. On remarque que la distance d'interpénétration est plus petite pour les cylindres que pour les sphères. Il apparaît aussi que la courbe «  $F - \delta$  » pour les cylindres semble presque linéaire, ou tout au moins que les effets non-linéaires sont beaucoup moins accentués. En ce qui concerne la surface de contact  $S$ , on remarque qu'à une même force  $F$ , celle-ci est plus grande pour les cylindres que pour les sphères. Expérimentalement, cela rend la tâche plus ardue. Effectivement la surface de contact étant plus grande, on sera plus sensible aux éventuels défauts de la surface, ce qui pourrait mettre à mal les prédictions théoriques plus facilement pour les cylindres que pour les sphères.



**FIG. III.3** – Comparaison des prédictions théoriques pour le contact entre deux sphères (traits en pointillés) et le contact entre deux cylindres (traits pleins). (a) : Relation entre la force  $F$  et la distance d'interpénétration  $\delta$  ; (b) : Surface de contact  $S$  en fonction de la force  $F$ .



## III.2 Fabrication des grains cylindriques

Les grains sont fabriqués un à un à l'atelier de mécanique du laboratoire (Fig. III.4). Ils sont d'abord découpés dans une plaque de polycarbonate (VISHAY COMPANY) d'épaisseur  $L = 9.4 \text{ mm}$  puis usinés au tour pour obtenir des cylindres à la taille voulue. Les deux faces circulaires sont protégées durant l'usinage afin de les maintenir lisses et intactes. Ce sont à travers ces deux surfaces que nous visualiserons les franges lumineuses. En statique, le module d'Young vaut  $E = 2.76 \text{ GPa}$  et le coefficient de poisson  $\nu = 0.38$ . La masse volumique vaut  $\rho = 1.2 \text{ g/cm}^3$ . Nous disposons de trois jeux de grains aux propriétés géométriques différentes :

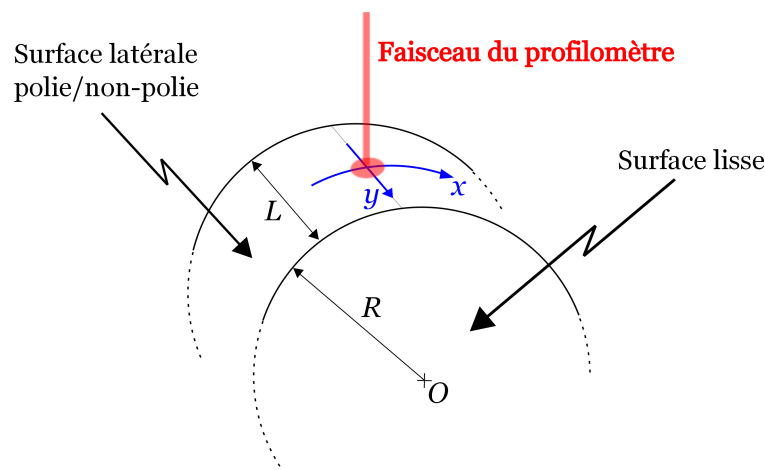
- Des grains de diamètre  $d_1 = 2R_1 = 13 \text{ mm}$  dont la surface latérale n'a pas été traitée après l'usinage.
- Une autre série de grains, de même diamètre  $d_1$ , dont la surface latérale a été polie.
- Enfin nous avons une dernière série de grains de diamètre  $d_2 = 2R_2 = 9.6 \text{ mm}$  non polis.

Cela va nous permettre d'observer l'influence de la rugosité des surfaces et du rayon des grains sur la propagation acoustique.



**FIG. III.4** – Photographie d'un grain photoélastique de forme cylindrique d'épaisseur  $L = 9.4 \text{ mm}$  et de diamètre  $d_1 = 13 \text{ mm}$ .

Nous avons mesuré la rugosité des grains usinés à l'aide d'un profilomètre optique (Veeco Wyco NT1100) appartenant à l'équipe de F. Guittard (Laboratoire de Chimie des Matériaux Organiques et Métalliques). Ce profilomètre fournit une cartographie de l'échantillon sans contact mécanique avec celui-ci. Nous avons réalisé des mesures pour les grains à l'état de surface brute et ceux polis. Les mesures ont été faites le long de deux courbes (Fig. III.5) :



**FIG. III.5** – Définition des deux axes  $x$  et  $y$  suivant lesquels on mesure la rugosité.

l'une dans le sens de la courbure (axe  $x$ ) et l'autre perpendiculaire (axe  $y$ ). Les résultats sont représentés sur la figure III.6 (colonne de gauche pour les grains à l'état brut et colonne de droite pour les grains polis).

Sur la figure III.6.a, on a reporté les points expérimentaux mesurés le long de l'axe  $x$ . On voit clairement apparaître la courbure du grain. On ajuste cette courbe par un polynôme du second degré dont on en déduit  $\Delta h = 11.4 \mu\text{m}$  et  $\Delta a = 385.1 \mu\text{m}$ . De plus, on trouve facilement que :

$$\begin{aligned} R^2 &= (R - \Delta h)^2 + \Delta a^2 \\ &\approx R^2 - 2R\Delta h + \Delta a^2 \end{aligned}$$

soit,

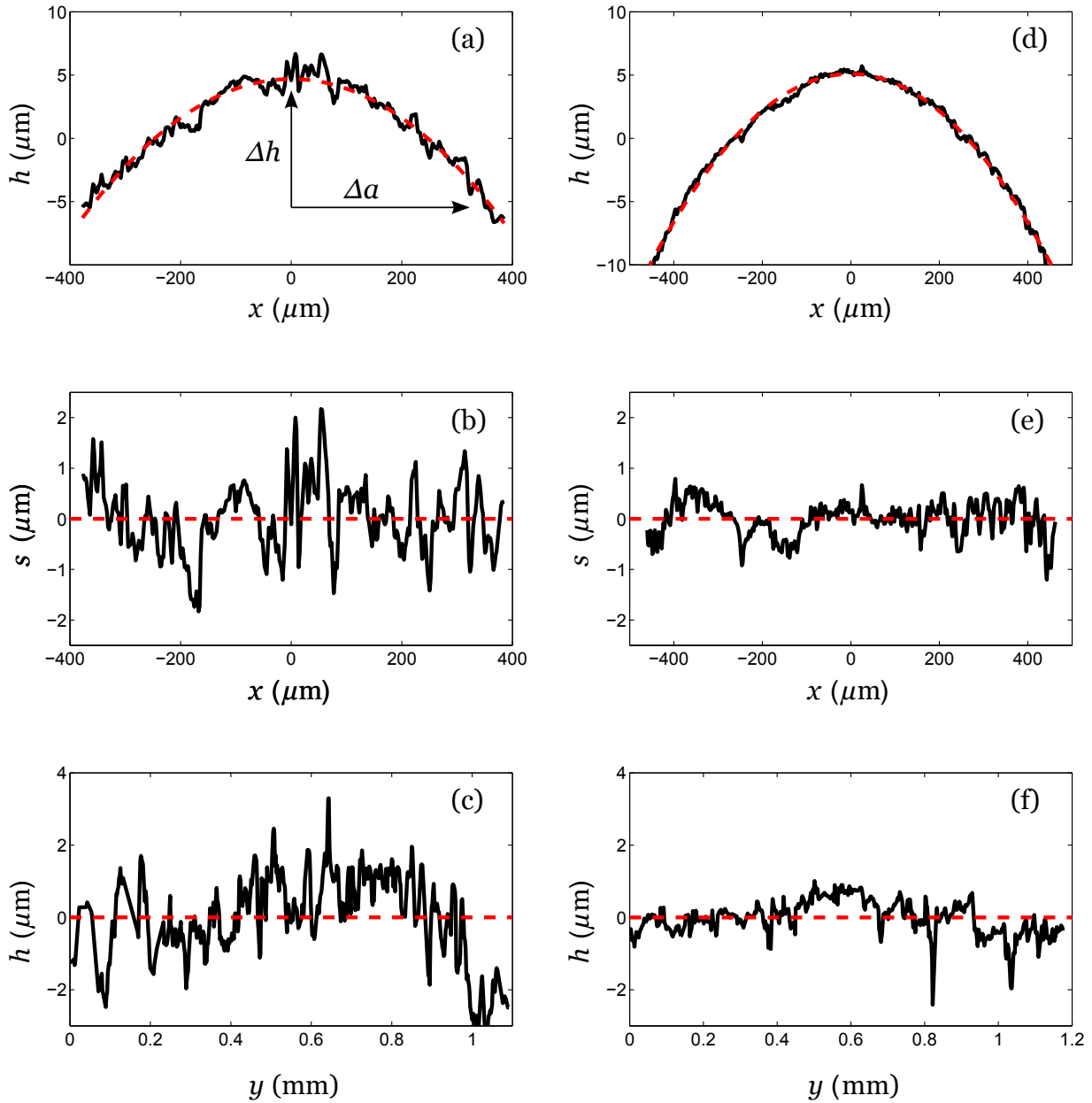
$$R = \frac{\Delta a^2}{2\Delta h} \quad (\text{III.18})$$

On trouve alors  $R = 6.5 \text{ mm}$ , ce qui est cohérent avec la valeur attendue.

Sur la figure III.6.b, nous avons soustrait aux points expérimentaux la courbe moyenne donnée par le polynôme précédemment calculé, on obtient la fonction  $s(x)$ . On retrouve alors les fluctuations de hauteur autour d'une ligne moyenne de hauteur nulle. On définit trois grandeurs pour définir la rugosité de la surface :

- la rugosité moyenne  $R_a$

$$R_a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |s_i| \quad (\text{III.19})$$



**FIG. III.6** — Mesure de la rugosité des surfaces au profilomètre optique. La colonne de gauche (a-c) correspond au grain à l'état de surface brut et la colonne de droite (d-f) au grain à l'état de surface poli. (a), (d) : profil  $h$  du grain le long de l'axe  $x$ . On voit apparaître la courbure du cylindre schématisée en pointillés; (b), (e) : même profil auquel on a soustrait la courbe moyenne donnée par le polynôme du second degré; cela donne la courbe  $s$ . On voit les fluctuations de hauteur autour de la ligne moyenne; (c), (f) : profil  $h$  du grain le long de l'axe  $y$ . Sur ces figures, on voit apparaître l'effet du polissage des surfaces sur la rugosité des grains.

- l'écart quadratique moyen de rugosité

$$R_q = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N s_i^2} \quad (\text{III.20})$$

- la mesure pic à pic de rugosité  $H$

$$H = \max(s) - \min(s) \quad (\text{III.21})$$

où  $N$  est le nombre de points de la fonction  $s$ .

Dans l'exemple présenté ici, on trouve :  $R_a = 0.53 \mu\text{m}$ ,  $R_q = 0.68 \mu\text{m}$  et  $H = 4 \mu\text{m}$ . On effectue les mêmes mesures suivant la direction perpendiculaire  $y$  (figure III.6.c). On mesure :  $R_a = 0.97 \mu\text{m}$ ,  $R_q = 1.22 \mu\text{m}$  et  $h = 6.6 \mu\text{m}$ .

Dans la colonne de droite de la figure III.6, on a tracé les mêmes courbes que dans la colonne de gauche mais pour les grains à l'état de surface poli. Pour pouvoir comparer visuellement les deux types de grains, on a tracé les courbes avec une même échelle verticale dans les deux cas. Il apparaît à l'oeil, comme on pouvait s'y attendre, que les fluctuations de hauteur sont moins importantes dans le cas poli.

Le tableau III.7 résume les différents paramètres de rugosité pour les deux types de grains, moyennés sur trois mesures.

		$R_a(\mu\text{m})$	$R_q(\mu\text{m})$	$H(\mu\text{m})$
axe $x$	état brut	0.49	0.63	3.9
	état poli	0.17	0.25	2.2
axe $y$	état brut	0.75	0.96	5.3
	état poli	0.37	0.46	2.9

**FIG. III.7** – Comparaison des paramètres de la rugosité pour les surfaces à l'état brut et les surfaces à l'état poli. Les axes  $x$  et  $y$  sont définis sur la Fig. III.5.

En conclusion, on retient que la rugosité des surfaces polies est environ deux fois plus petites que celle des grains rugueux. L'ordre de grandeur de cette rugosité est le micromètre.

### III.3 Mesure des lois $\ll F - S \gg$ et $\ll F - \delta \gg$ pour des cylindres

Dans le premier paragraphe de ce chapitre, nous avons présenté un modèle de contact entre deux cylindres. Nous avons d'abord donné une relation entre la surface de contact  $S$  et la force de confinement  $F$ , puis nous avons proposé un modèle afin de déterminer la relation entre la force  $F$  et la distance d'interpénétration  $\delta$ . Dans cette section, nous allons mesurer expérimentalement ces deux lois et confronter nos résultats avec ceux tirés du modèle. Avant cela, je présente le dispositif expérimental utilisé qui nous reservira également pour l'étude de la chaîne unidimensionnelle.

#### III.3.1 Le dispositif expérimental

Le dispositif est schématisé sur la figure III.8. On dispose d'un bâti en duraluminium long de 470 mm et composé de deux parties, la partie inférieure ① et la partie supérieure ②. Dans la pièce inférieure, une gorge a été creusée sur toute la longueur. Cette gorge fait 0.2 mm de profondeur et 10 mm de largeur. On place les grains dans cette gorge. La largeur de cette gorge étant adaptée à la largeur des cylindres, cela évite qu'ils ne se mettent en quinconce. La longueur de la pièce a été choisie pour pouvoir faire une chaîne de 36 grains. Cette pièce est fixée à une autre pièce ③ en aluminium, en forme de U. Dans l'espace vide entre ces deux pièces, on insère des vitres ⑥ faites sur mesure, longues de 470 mm et hautes de 40 mm.

Lorsqu'on va mettre la chaîne de grains sous compression, celle-ci va naturellement avoir tendance à flamber et les centres des grains ne seront donc plus alignés. Pour éviter cela, il faut exercer une force verticale sur les grains, notée  $F_{\perp}$  par la suite, pour les contraindre verticalement. C'est la fonction de la pièce supérieure ②. On a procédé de deux manières différentes pour exercer cette force :

- MÉTHODE 1 : On dispose d'une deuxième pièce en U ④ dans laquelle on a fait des trous régulièrement espacés. En regard de ces trous, on a réalisé des trous taraudés dans ②. On fait passer par ces trous des vis ⑧ que l'on visse plus ou moins dans ceux de ②. Comme la tête des vis est en appui sur la pièce en U, cela permet de déplacer la pièce ② verticalement sur une distance d'environ 1 cm. De cette façon, on la descend pour qu'elle soit en contact avec les grains. On dispose d'une autre série de trous dans ④ pour faire passer des vis en nylon ⑨ qui viennent appuyer sur ②. Ainsi on applique

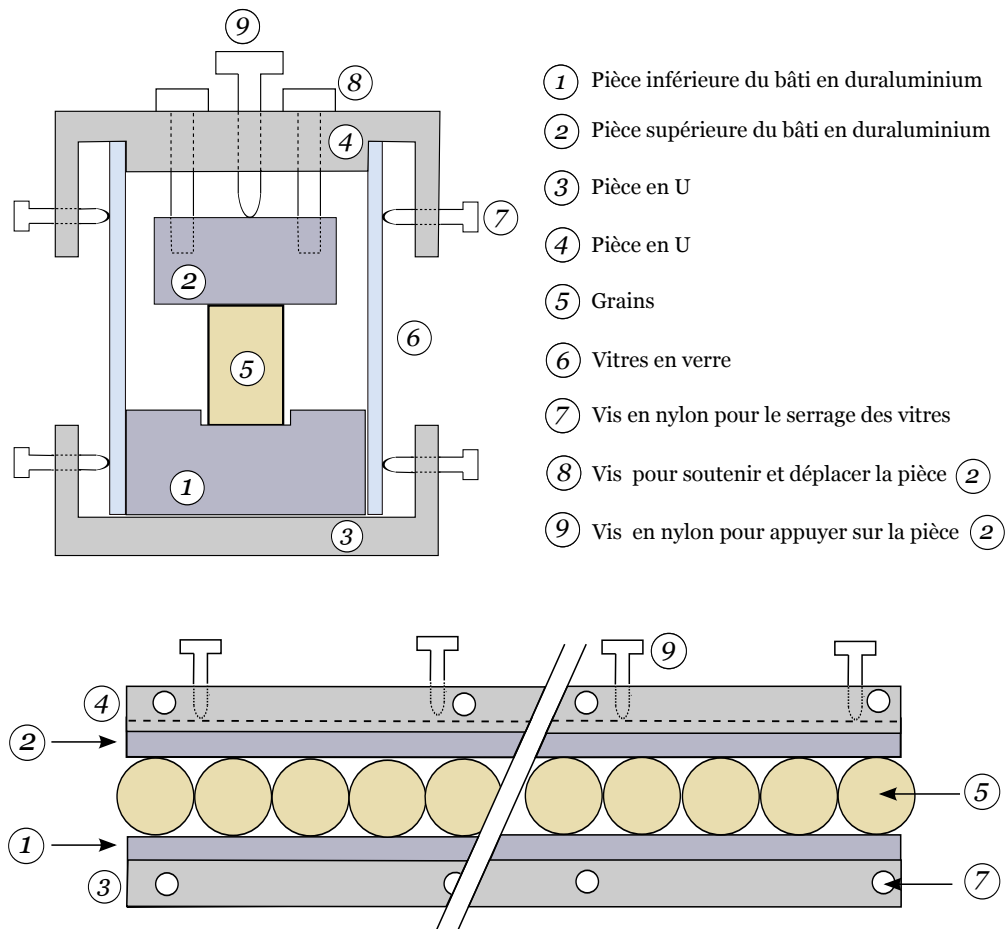


FIG. III.8 – Schéma du dispositif expérimental de la chaîne de grains unidimensionnelle.

une force et on empêche le flambage de la chaîne. Cette méthode permet de mettre la chaîne sous compression avec une force statique  $F_0$  valant jusqu'à environ 120 N tout en gardant le centre des grains alignés.

- MÉTHODE 2 : On place la pièce ② sur les grains et on ajoute dessus des masses calibrées. Ainsi, on contrôle exactement la force totale verticale et on peut facilement en déduire<sup>3</sup>  $F_{\perp}$ . Cette méthode rend accessible la mesure de  $F_{\perp}$  mais ne permet pas d'accéder à des forces de compression  $F$  aussi grandes qu'avec l'autre méthode. En fonction des expériences que l'on souhaite réaliser, on choisit l'une ou l'autre méthode.

---

3.  $F_{\perp}$  est la force verticale ressentie par un grain. En faisant l'hypothèse que la force totale verticale se répartit uniformément sur tous les grains de la chaîne, il suffit de diviser cette force par le nombre de grains pour connaître  $F_{\perp}$ .

---

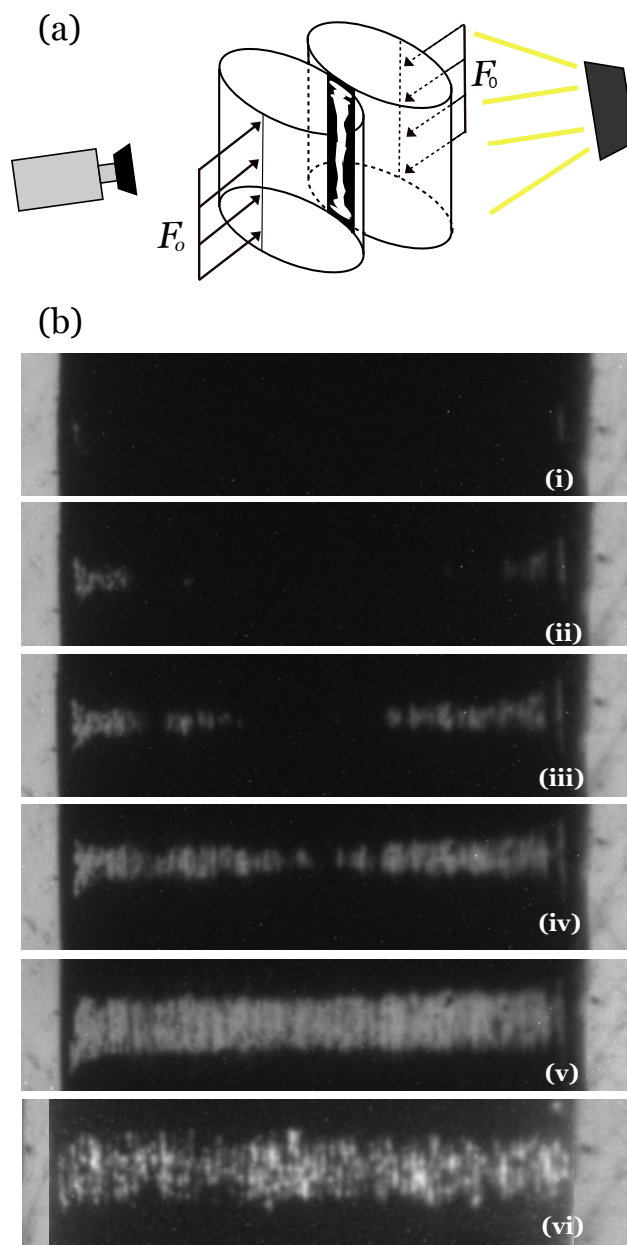
### III.3.2 Relation expérimentale $\ll F_0 - S \gg$

Dans ce paragraphe, nous présentons les mesures sur l'évolution de la surface de contact  $S$  entre deux cylindres lorsque la force de confinement  $F_0$  augmente et comparons nos résultats à l'Eq. III.14.

Nous procédons comme suit (cf le schéma de principe Fig. III.9.a). La chaîne 1D de grains est mise sous compression à la force  $F_0$  voulue. Les cylindres sont éclairés en biais. De l'autre côté de la chaîne et dans l'axe de l'éclairage, nous plaçons une caméra. Lorsque les cylindres sont comprimés l'un contre l'autre, leurs surfaces se déforment et deviennent localement planes. La lumière est alors transmise, sans réflexion, et cette zone apparaît lumineuse. En revanche, aux endroits où les grains ne se touchent pas, la lumière est réfléchiée par la courbure des grains, et cette zone apparaît noire (cf. Fig III.9.a). Pour chaque force  $F_0$ , on prend une image et on visualise donc la surface de contact. On a réalisé cette expérience sur une vingtaine de contacts afin d'accéder à une évolution moyenne ; pour cela, il suffit juste de translater l'ensemble lampe-caméra par rapport à la chaîne.

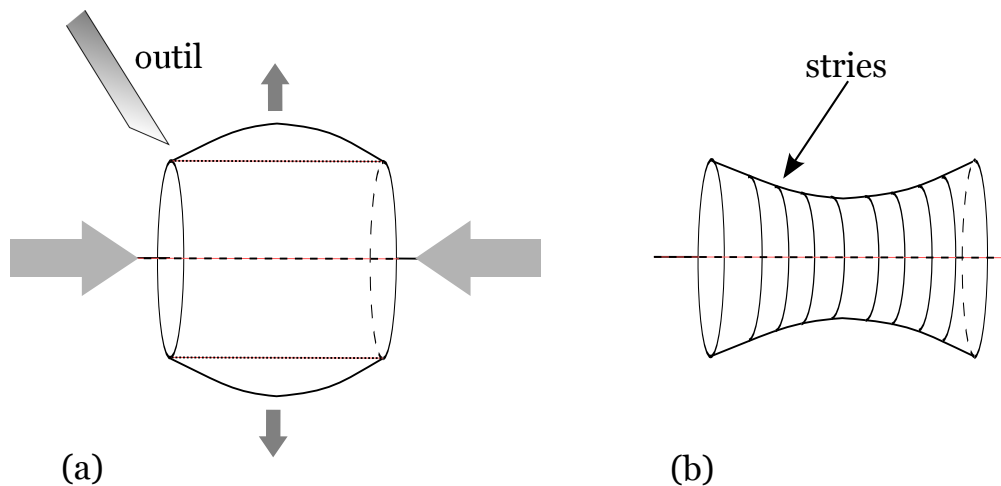
La figure III.9.b montre les photographies de la surface de contact entre deux cylindres lisses lorsque la force  $F_0$  croît. On constate que le contact ne s'effectue pas uniformément sur toute la largeur du grain, comme on s'y attendrait pour des surfaces idéales. Aux faibles forces, le contact n'apparaît qu'aux bords du grain, puis lorsque la force augmente, les grains commencent à se toucher également dans la partie centrale, et enfin aux grandes forces, la zone de contact est un rectangle homogène de largeur  $2a$ . Toutefois, même à grande force, il apparaît des bandes noires verticales de très petites largeurs dans la bande blanche (cas (v)). Enfin remarquons qu'à une même force  $F_0$ , la surface totale en contact dans le cas de grains lisses est plus grande que celle dans le cas de surfaces rugueuses (cas (v) et (vi)).

Ces observations nous conduisent à deux conclusions. Puisque le contact apparaît d'abord aux bords des grains puis ensuite au centre, on en déduit que ceux-ci ont un rayon plus grand vers l'extérieur qu'au centre (Fig. III.10). Cette imperfection est certainement une conséquence de l'usinage des grains. En effet, durant l'usinage, les grains sont comprimés suivant leur axe de symétrie dans un étau ; ils se dilatent dans l'autre direction faisant ainsi apparaître une boursoufflure au milieu du grain. Lorsque le grain est usiné pour lui donner la forme souhaitée, un outil enlève de la matière, et notamment cette excroissance. En desserrant l'étau, le grain se contracte là où il s'était dilaté et l'ancienne boursoufflure devient un léger creux. On qualifiera cette imperfection de rugosité macroscopique. C'est en effet un défaut de



**FIG. III.9** – Mesure de la surface de contact  $S$  entre deux cylindres en fonction de la force de confinement statique  $F_0$ . (a) Schéma de principe : on comprime les cylindres avec une force  $F_0$ , leurs surfaces se déforment et deviennent localement planes. On éclaire la zone de contact à l'aide d'une lampe halogène placée en biais par rapport à la direction des cylindres et on place une caméra de l'autre côté de la chaîne dans l'axe de la lampe. Aux endroits où les grains se touchent, la surface est plane et la lumière est transmise : la zone apparaît lumineuse. Aux endroits où les surfaces ne sont pas en contact, la lumière est réfléchiée et la zone apparaît sombre. (b) Images de la zone de contact pour différentes forces statiques  $F_0$ . De (i) à (v) : cas des cylindres lisses, la force vaut  $F_0 = 0, 3, 9, 22, 90$  N. (vi) :  $F_0 = 90$  N pour des cylindres rugueux. Le contraste a été augmenté pour une meilleure visibilité. En comparant les images (v) et (vi), on voit l'effet du polissage sur la surface de contact.

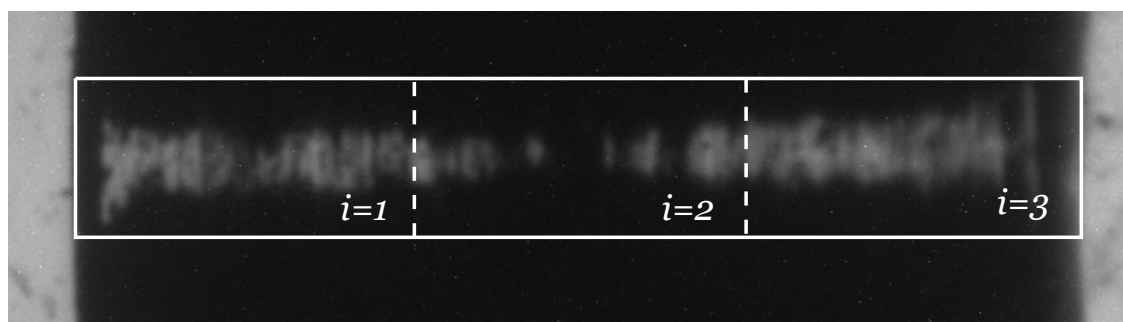




**FIG. III.10** – Profil réel des grains : le rayon du grain à ses extrémités est plus grand que le rayon au centre. Cela est une conséquence de l'usinage des grains. (a) Lors de l'usinage, les grains sont comprimés suivant leur axe de symétrie ce qui provoque une dilatation dans la direction perpendiculaire. Le grain présente donc une boursoufflure qui est maximale au milieu. Pour façonner la forme souhaitée, l'outil ôte de la matière et notamment cette boursoufflure. (b) En déserrant l'étau, le grain se contracte là où il s'était dilaté et l'ancienne boursoufflure devient désormais un léger creux. Cette imperfection sera qualifiée de rugosité macroscopique. A cela s'ajoute des stries sur toute la circonférence du grain et régulièrement espacées entre elles. Ce sont les marques de l'outil. On parlera de rugosité microscopique. La rugosité macroscopique n'est pas visible au profilomètre car l'échelle spatiale de ces variations est plus grande que la taille du faisceau optique.

la surface du grain et elle prend forme sur la largeur du grain, d'où son nom. Par opposition, on parlera de rugosité microscopique pour les stries verticales noires qui apparaissent dans la bande blanche même à grandes forces. Le long de ces stries, les grains ne se touchent pas. Ces rainures de faible largeur sont présentes sur toute la circonférence du grain et régulièrement espacées entre elles. Elles correspondent à la marque de la pointe de l'outil pendant l'usinage. Lors du polissage des grains, ce sont ces rainures que l'on atténue.

Il doit donc exister une force de transition au-dessus de laquelle le contact entre les cylindres s'effectue de façon à peu près homogène sur toute la largeur du grain. En-dessous de cette force, les grains ne se touchent que dans certaines zones. A priori, cette transition se produit à des forces différentes pour les grains lisses et pour les grains rugueux. Nous avons cherché à quantifier cette force de transition et à mesurer la surface de contact réelle  $S$  pour la comparer à la valeur théorique. Pour cela, nous définissons trois zones de contrôle ( $i = 1, 2, 3$ ), de tailles égales et qui englobent la surface de contact réelle (Fig. III.11). Dans chacun de ces rectangles, nous mesurons l'intensité lumineuse transmise par chaque

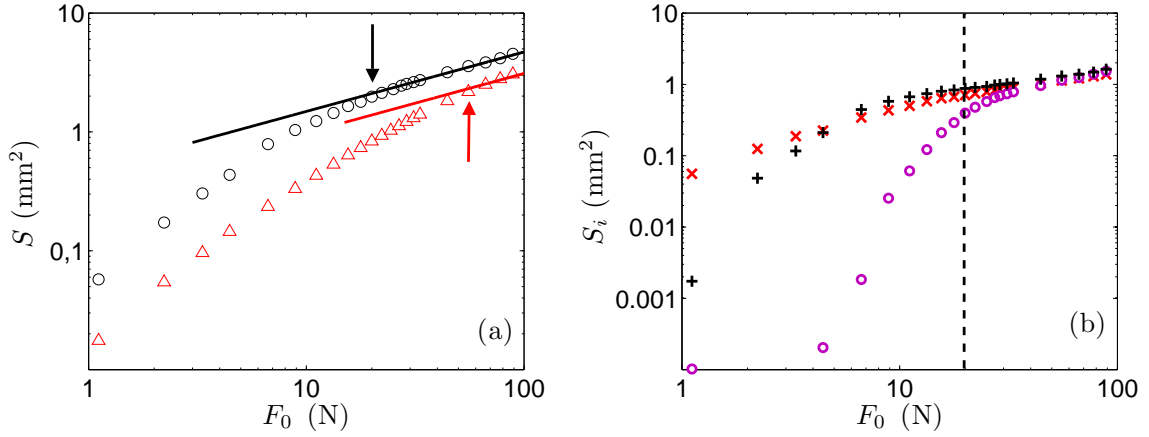


**FIG. III.11** – Définition des trois zones de contrôle afin d'y compter le nombre de pixels en contact.

pixel : lorsque l'intensité dépasse une valeur seuil judicieusement choisie, nous disons que les grains sont en contact à cet endroit. Il ne reste ensuite qu'à compter le nombre de pixels vérifiant ce critère, et à le convertir en termes de surface réelle. Cela nous donne la surface de contact  $S_i$ , exprimée en  $\text{mm}^2$ , dans chacune des zones. La surface de contact totale  $S$  est la somme des surfaces  $S_i$ . Nous faisons cela pour chaque force  $F_0$  et pour chaque contact entre les grains. Les résultats pour les deux types de grains sont présentées sur la Fig. III.12.a.

Commençons par discuter le cas des cylindres lisses. Nous avons représenté sur la figure III.12 la courbe en puissance 1/2 prévue par la théorie :  $S \propto F_0^{1/2}$  (Eq. III.14). L'évolution de la surface réelle avec  $F_0$  présente deux régimes. Aux faibles forces, les points expérimentaux sont en-dessous de la loi en puissance 1/2, ce qui signifie que la surface de contact est plus petite que ce qui est prévu. Par contre, elle augmente plus rapidement avec la force  $F_0$ . A partir d'environ 20 N (schématisée par la flèche vers le bas), les points expérimentaux s'alignent avec le modèle et on retrouve bien le comportement  $S \propto F_0^{1/2}$ . Dans le cas des cylindres plus rugueux, la surface de contact est toujours plus petite que celle obtenue pour les grains lisses. Ceci est cohérent avec le fait que la rugosité y est plus importante. On retrouve également deux régimes mais la transition est moins prononcée. L'évolution en puissance 1/2 est obtenue pour une force légèrement supérieure, à environ 50 N (flèche vers le haut).

Revenons un instant au cas des cylindres lisses. On a vu que la surface totale  $S$  présente une transition autour de 20 N, mais on ne sait pas à quoi correspond physiquement cette transition. Sur la Fig. III.12.b, on a tracé les surfaces  $S_i$  mesurées dans chacune des trois zones de contrôle. A faible force, on voit que la surface ne prend des valeurs significatives que dans les deux zones  $i = 1$  et  $i = 3$ , c'est-à-dire dans les zones aux bords du grain.



**FIG. III.12** – (a) : Evolution, en échelles Log-Log, de la surface totale de contact  $S$  en fonction de la force de compression  $F_0$  pour des cylindres lisses (○) et des cylindres rugueux (△). (b) : Evolution, en échelles Log-Log, des surfaces de contact  $S_i$  avec  $F_0$  pour les grains lisses ( $i = 1$  (×);  $i = 2$  (○);  $i = 3$  (+)).

Les grains ne se touchent que dans ces zones, on retrouve bien sûr ce qu'on avait dit à l'aide des images de la Fig. III.9. De plus, on remarque sur cette figure que la force de 20 N correspond à la force pour laquelle les valeurs des surfaces de contact dans les trois zones sont similaires. Cela veut dire qu'à cette force le contact a lieu dans les trois zones; on se retrouve avec un contact homogène sur toute la largeur du grain, et par conséquent on retrouve la prédiction théorique. Cela prouve que la transition dans la loi «  $F_0 - S$  », et plus généralement le désaccord trouvé avec l'Eq. III.14, est une conséquence des rugosités macroscopique et microscopique.

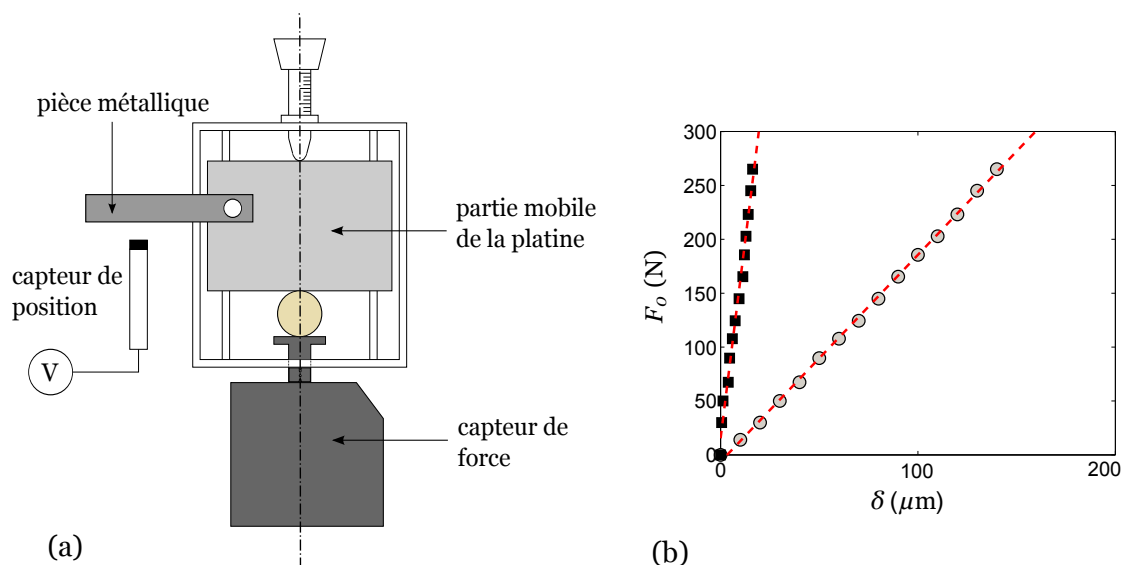
### III.3.3 Relation expérimentale « $F_0 - \delta$ »

Ce paragraphe est consacré à la mesure de la loi de contact «  $F_0 - \delta$  » pour un cylindre. Nous présentons les deux méthodes envisagées pour la mesure et ensuite les résultats obtenus.

#### Méthode 1 : Mesure sur un grain

Notre première tentative consiste à mesurer simultanément la force appliquée  $F_0$  et l'écrasement  $\delta$  d'un cylindre. On utilise pour cela une platine de translation qui servira de presse, d'un capteur de force et d'un capteur de déplacement (Fig. III.13.a).

On dispose d'une platine de translation dont la partie mobile se translate suivant la verticale. En dessous de la platine et fixé à la table optique, on place un capteur de force composé



**FIG. III.13** – (a) : Schéma de l'expérience (méthode 1) pour déterminer la loi de contact «  $F_0 - \delta$  » pour un grain. On mesure simultanément la force  $F_0$  et le déplacement  $\delta$  grâce au capteur de force, à la platine de translation et au capteur de position. Ce capteur inductif fournit une tension proportionnelle à la distance qui le sépare de la pièce métallique. (b) : Raideur du capteur de force. Les deux types de points correspondent aux valeurs de déplacement lues sur le vernier ( $\circ$ ) ou via le capteur de déplacement ( $\square$ ).

d'un bâti et d'une partie déformable en forme de T. Cette dernière passe par un trou que l'on a fait dans la pièce horizontale de la platine (cf. Fig III.13.a). On pose l'échantillon à tester sur la surface plane du capteur de force. De plus, on a fixé solidement à la partie mobile de la platine une pièce métallique. En regard de cette pièce, on met un capteur de position inductif relié à un voltmètre. La tension fournie par ce capteur est proportionnelle à la distance qui le sépare de la pièce métallique. On peut ainsi déterminer  $\delta$ . Cette mesure est complémentaire de celle lue directement sur le vernier. En tournant le vernier de la platine, on fait translater la partie mobile et on peut ainsi écraser l'échantillon avec une force  $F_0$  que nous donne le capteur de force.

Il est important de noter que lorsqu'on va appliquer une force, le capteur de force va aussi se déformer. Il est possible que sa déformation soit du même ordre de grandeur que celle de l'échantillon. La première précaution à prendre est donc de déterminer la raideur du capteur de force. Pour cela, on reprend le dispositif de la figure III.13.a en ôtant l'échantillon : la partie mobile de la platine appuie directement sur le capteur de force. Les résultats sont reportés sur la figure III.13.b. On voit clairement que les distances mesurées par le capteur

inductif de déplacement sont inférieures à celles directement lues sur le vernier. Une question s'impose : pourquoi la mesure donnée par le vernier est-elle plus grande que le déplacement réel mesuré par le capteur ? L'explication que nous avons retenue est qu'il existe des parties du dispositif autres que le capteur de force qui se déforment lorsqu'on applique la force. Cela peut être le filetage de la vis du vernier, ou alors l'indentation de la vis du vernier dans le bloc mobile. Ce dispositif ne va donc pas convenir pour certains échantillons. Si le matériau est trop dur, sa déformation sera petite et il faudra tenir compte à la fois de la déformation du capteur de force et aussi des déformations qui se produisent ailleurs dans le dispositif.

En revanche ce montage doit convenir pour les matériaux mous pour lesquels les déformations seront de toute façon grandes devant les autres déformations inhérentes au système. C'est ce qu'on a vérifié en mesurant le module d'Young d'un échantillon de polyuréthane<sup>4</sup>. Pour ce matériau et dans une gamme de force allant jusqu'à 100N, les mesures de  $\delta$  par les deux méthodes sont similaires. La force  $F_0$  augmente linéairement avec l'écrasement  $\delta$  et on trouve une valeur du module d'Young  $E = 4.5 \text{ MPa}$ , cohérente avec celle fournie par le fournisseur<sup>5</sup>. Cela confirme que ce dispositif est adapté pour les matériaux mous.

Nous allons alors l'utiliser pour trouver la loi «  $F_0 - \delta$  » pour un cylindre en polyuréthane. Les résultats obtenus sont reportés Fig. III.14. On notera que dans la gamme de force  $F$  explorée, les déformations atteignent 1 mm, c'est-à-dire bien plus grandes que les déformations des autres parties du montage. La relation théorique obtenue pour des cylindres infiniment longs (Eq. III.17) est relativement bien retrouvée. Cette mesure permet de valider le modèle utilisé dans la section III.1.3.

On a donc trouvé et vérifié expérimentalement l'expression analytique de la loi de contact entre deux cylindres. Dans cette gamme de force, lorsqu'on trace les points en échelles logarithmiques, ceux-ci s'alignent sur une droite de pente 1.30, inférieure à la valeur 3/2 obtenue pour les sphères. Comme on l'avait déjà mentionné au § III.1.3, la non-linéarité de la loi de contact est moins forte pour les cylindres que pour des sphères.

## Méthode 2 : Mesure cumulée sur une chaîne de 36 grains

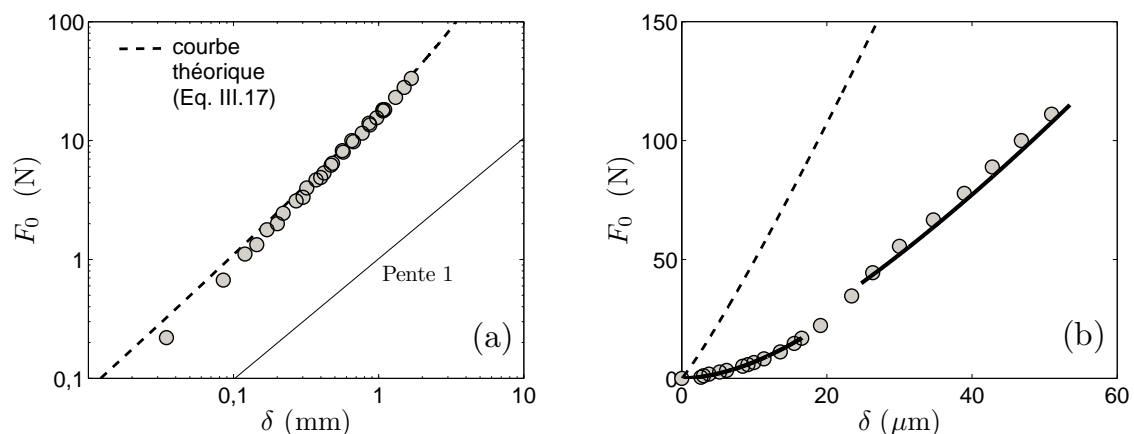
Nous avons vu que la méthode précédente n'est pas adaptée pour les échantillons trop rigides tels que les cylindres en polycarbonate. En effet, les déformations de l'échantillon sont

---

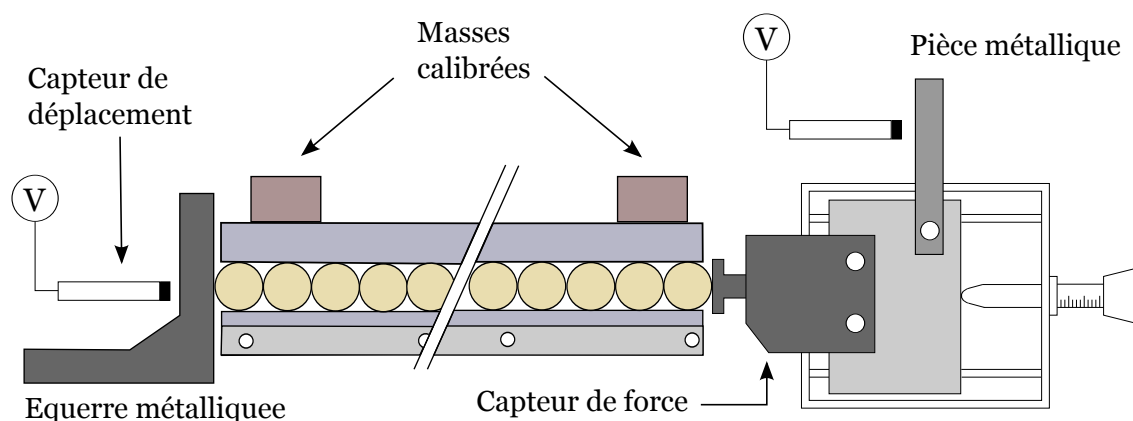
4. Dans la littérature, on trouve que le polyuréthane est 400 fois moins rigide que le polycarbonate.

5. On peut remarquer ici que pour une même force  $F_0 \propto 100 \text{ N}$ , l'écrasement est d'environ  $150 \mu\text{m}$  dans ce cas quand il valait à peine  $10 \mu\text{m}$  lors de la détermination infructueuse de la raideur du capteur de force.

---



**FIG. III.14** – Loi de contact «  $F_0 - \delta$  » pour des cylindres. (a) Echelles log – log. Cylindre en polyuréthane. Les points expérimentaux ont été obtenus par la méthode 1. La courbe en pointillés correspond à la prédiction théorique de l'Eq. III.17 avec  $E = 4 \text{ GPa}$  et  $\nu = 0.49$ . Dans cette gamme de force, les points expérimentaux s'alignent sur une droite de pente 1.30. Cette mesure est cohérente avec la mesure de Daniels et coll. [113]. (b) Cylindre en polycarbonate. Les points expérimentaux ont été obtenus avec la méthode 2. Il apparaît deux zones que l'on ajuste avec des lois de puissance différentes (traits pleins) : la puissance vaut 1.78 pour  $F_0 < 20 \text{ N}$  et 1.37 pour  $F_0 > 20 \text{ N}$ . Les pointillés représentent le modèle théorique. Pour ce matériau, on ne retrouve pas la prédiction théorique de l'Eq. III.17.



**FIG. III.15** – Schéma de l'expérience (méthode 2) pour déterminer la loi de contact «  $F_0 - \delta$  ». On mesure la déformation de la chaîne entière constituée de 36 grains, il ne reste qu'à diviser cette déformation par le nombre de grains pour avoir  $\delta$ . Les grains sont bloqués à une extrémité par une équerre qui sert de mur indéformable et comprimés à l'autre extrémité par le capteur de force monté sur une platine de translation.

équivalentes aux autres déformations qui se produisent dans le système. On va donc effectuer la mesure non pas sur un grain mais sur une série de 36 grains en contact : ainsi on va cumuler les déformations de tous les grains. On utilise le dispositif présenté au paragraphe III.3.1 et schématisé sur la Fig. III.15. Pour contraindre les grains verticalement afin d'éviter que la chaîne ne flambe, on utilise des masses calibrées qui reposent sur la pièce supérieure du bâti (cf. Sec. III.3.1). A une extrémité de la chaîne, le capteur de force est monté sur une platine de translation et vient comprimer les 36 grains. A l'autre extrémité, une équerre épaisse et en acier sert de mur massif indéformable. On s'en assure grâce à un capteur de position placé juste derrière l'équerre. On mesure la compression totale de la chaîne de grains grâce au capteur de position inductif qui mesure le déplacement de la pièce métallique liée au capteur de force. On a ainsi accès à la fois à la force de compression  $F_0$  et à la déformation de la chaîne. Il suffit ensuite de diviser le déplacement horizontal total par le nombre de grains pour avoir la déformation d'un grain. La Fig. III.14.b montre la loi «  $F_0 - \delta$  » pour les cylindres en polycarbonate. Remarquons d'abord que l'ordre de grandeur des déformations est d'une dizaine de microns<sup>6</sup> à  $F_0 = 100$  N. On voit apparaître deux zones que l'on peut modéliser par deux lois de puissance :

$$F_0 \propto \delta^\alpha \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha = 1.78 & \text{pour } F < 20\text{N} \\ \alpha = 1.37 & \text{pour } F > 20\text{N} \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

La non-linéarité de la loi de contact est donc plus importante aux faibles déformations qu'aux grandes déformations. Aux faibles compressions, l'exposant  $\alpha$  est même supérieur à celui de la loi de Hertz relative aux sphères<sup>7</sup>. En revanche, aux grandes forces, il est plus petit que celui de la loi de Hertz et se rapproche de celui mesuré pour les cylindres en polyuréthane pour lesquels le modèle théorique convient bien (Fig. III.14.a). En revanche, on s'aperçoit que les points expérimentaux ne se superposent pas à la courbe tirée de l'Eq. III.17 avec les valeurs de  $E$  et  $\nu$  données par le fournisseur. Nous n'avons pas d'explication à ce désaccord. Pourtant, la loi de l'Eq. III.17 semble correcte puisqu'elle ajuste bien les données pour le cylindre en polyuréthane.

---

6. Cette déformation est similaire à celle du capteur de force à la même force (Fig. III.13), on comprend que la méthode 1 était inadaptée pour ce matériau.

7. Dans [37], les auteurs mesurent un exposant de 1.8 pour le contact entre deux cylindres en plexiglas, proches de la valeur 1.78 que l'on déduit de notre mesure.

---

### III.3.4 Résumé

Nous récapitulons ici les données expérimentales relatives au contact entre cylindres et comparons celles-ci aux prédictions données par les Eqs. III.14 et III.17.

La courbe expérimentale «  $F_0 - S$  » présente deux régimes : aux grandes forces, on retrouve bien la loi de puissance attendue  $S \propto F_0^{1/2}$  pour les cylindres mais pas aux faibles forces. Pour celles-ci, la surface est plus petite que celle attendue mais augmente plus rapidement avec la force de confinement  $F_0$ . Dans cette gamme de force, on a observé que les cylindres ne se touchent pas sur toute leur largeur à cause d'une imperfection sur leur forme. C'est ce qu'on a appelé la *rugosité macroscopique*. Ce défaut est une conséquence de l'usinage des grains. La transition se produit pour une force d'environ 20 N dans le cas des cylindres lisses. Cette transition correspond à la force à partir de laquelle les cylindres se touchent de façon quasi-homogène suivant une bande rectangulaire.

On a aussi déterminé expérimentalement la courbe «  $F_0 - \delta$  ». Pour des grains mous en polyuréthane, la mesure est en très bon accord avec l'Eq. III.17, ce qui valide le modèle de contact adopté. Cela a aussi été observé par Owens et Daniels [113]. Ainsi, l'Eq. III.17 est bien la loi de contact pour des cylindres qui étend la loi de Hertz relative aux sphères. Par contre, pour des grains plus rigides comme ceux en polycarbonate, nos mesures ne se superposent pas à la loi de contact théorique de l'Eq. III.17. La courbe expérimentale montre deux régimes que l'on a modélisés par deux lois de puissance :  $F_0 \propto \delta^\alpha$  avec  $\alpha = 1.78$  puis 1.37. La séparation entre ces deux régimes a lieu pour une force d'environ 20 N, identique à la force de transition pour la courbe «  $F_0 - S$  ». Nous chercherons donc à voir si on retrouve ces deux régimes pour la dépendance des ondes acoustiques avec  $F_0$  (Loi «  $F_0 - V$  »).

Mais alors pourquoi ne pas utiliser les grains mous, comme dans [113], qui ne présentent pas ces deux régimes ? Ce matériau présente d'autres inconvénients : il présente un comportement viscoélastique peu simple. La dissipation est aussi beaucoup plus importante. Pour des forces de quelques Newtons, sa section droite n'est plus circulaire. Et surtout, on a remarqué qu'il y a de l'adhésion entre les grains. Cette force de cohésion est hystérétique et dépend de l'historique de la force de confinement appliquée. De plus, elle permet au système de résister à la traction, ce qui ne doit pas être le cas quand on étudie des milieux granulaires secs. On a donc préféré opter pour les grains en polycarbonate. De plus, cela permettra de s'intéresser à la propagation d'ondes dans un système qui présente une double loi de puissance [87].



Après avoir discuté la loi de contact théorique et expérimentale propre aux cylindres, je présente ci-après notre méthode de traitement d'images pour tirer des informations quantitatives à partir des images photoélastiques. Avant cela, je rappelle ce qu'est la photoélasticité.

### III.4 La photoélasticité

La photoélasticité est la propriété qu'ont certains solides transparents de devenir biréfringents sous l'influence de contraintes mécaniques [48, 114]. La plupart des corps transparents normalement non-biréfringents le deviennent lorsqu'ils sont soumis à des contraintes. Il s'agit d'une biréfringence induite, phénomène plus ou moins important suivant la nature du corps. Bien évidemment, les matériaux utilisés en photoélasticité ont une biréfringence induite importante. Pour visualiser cet effet, il suffit d'observer, entre deux polariseurs, un morceau de plastique ou de verre que l'on tire ou que l'on tord. On voit alors apparaître un réseau de franges colorées qui se déplace au fur et à mesure qu'on appuie sur le matériau. Ces franges sont directement reliées à l'état de contraintes dans le matériau.

Dans la suite, on s'intéressera au cas de solide bidimensionnel contraint dans un plan. Ce sera notamment le cas des cylindres utilisés dans nos expériences.

#### Relation constitutive de la photoélasticité

Lorsqu'une onde se propage dans un matériau biréfringent, chacune des composantes de l'onde se propage le long d'un axe optique du matériau et perçoit un indice optique différent. On notera  $n_1$  et  $n_2$  les indices optiques suivant les deux axes optiques du matériau. Il faut trouver la relation constitutive entre les contraintes appliquées au matériau et les propriétés optiques qui en résultent. On fait les deux hypothèses suivantes pour un matériau photoélastique bidimensionnel :

- Les axes optiques de biréfringence du matériau sont les directions principales des contraintes
- La différence des indices de réfraction  $n_1$  et  $n_2$  est reliée linéairement à la différence des contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  :

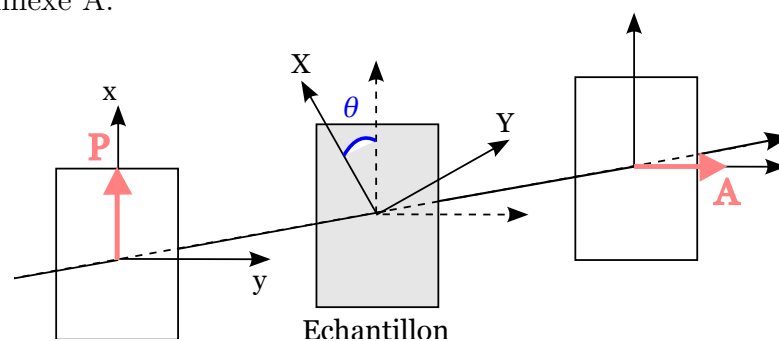
$$\Delta n = (n_2 - n_1) = C(\sigma_2 - \sigma_1) \quad (\text{III.23})$$

La constante  $C$  est caractéristique du matériau. On l'appelle constante de Brewster ou constante photoélastique du matériau. Elle a la dimension de l'inverse d'une contrainte. Elle s'exprime généralement en Brewster ( $1 \text{ Bw} = 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$ ).

Il nous faut maintenant mettre au point une méthode expérimentale pour mesurer ce déphasage induit par la biréfringence. Nous en présentons deux dans ce qui suit. Il nous faut pour cela rappeler l'effet de la biréfringence sur la propagation de l'onde.

### Le polariscope plan

Le schéma de l'expérience est représentée sur la figure III.16. Nous disposons d'un polariscope plan constitué, dans le sens de la propagation, d'un polariseur linéaire  $P$ , du matériau biréfringent d'épaisseur  $e$  et d'un analyseur linéaire  $A$  perpendiculaire à  $P$ . Les calculs sont détaillés dans l'annexe A.



**FIG. III.16** – Schéma d'un polariscope plan constitué d'un polariseur  $P$ , de l'échantillon biréfringent et d'un analyseur  $A$ . Les axes optique de biréfringence  $(X, Y)$  sont inclinés d'un angle  $\theta$  par rapport à la direction du polariseur.

On trouve que l'intensité lumineuse  $I$  en sortie du dispositif vaut :

$$I \propto \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (\text{III.24})$$

où  $\phi$  est le déphasage induit par la biréfringence du matériau.

Cette intensité lumineuse  $I$  peut être nulle pour deux raisons :

- Lorsque  $\sin(2\theta)=0$

Les directions principales des contraintes sont alors parallèles ou perpendiculaires à la direction du polariseur. L'ensemble des points de l'échantillon vérifiant cette propriété forment des lignes qu'on appelle *isoclines*. Cette condition est indépendante de l'épaisseur du matériau et de la longueur d'onde. Les lignes *isoclines* changent de position et de forme lorsque l'ensemble analyseur-polariseur tourne. Cette propriété est

utilisée pour déterminer, en chaque point de l'échantillon, l'orientation des directions principales des contraintes.

- Lorsque  $\sin(\phi/2)=0$

Le déphasage est alors un multiple de  $2\pi$ . L'ensemble des points de l'échantillon vérifiant cette condition forment les lignes *isochromes*. C'est donc l'ensemble des points où le déphasage vaut :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} e \Delta n = p(2\pi) \quad , \quad \text{avec } p \text{ un entier} \quad (\text{III.25})$$

En utilisant l'équation III.23, on trouve :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = p \frac{\lambda}{eC} \quad (\text{III.26})$$

Les lignes *isochromes* sont donc le lieu des points d'égale valeur de la différence des contraintes propres. Elles ne dépendent que de la contrainte, et par conséquent elles restent fixes indépendamment de l'orientation du couple P-A. C'est ainsi qu'on peut les distinguer des *isoclines*.

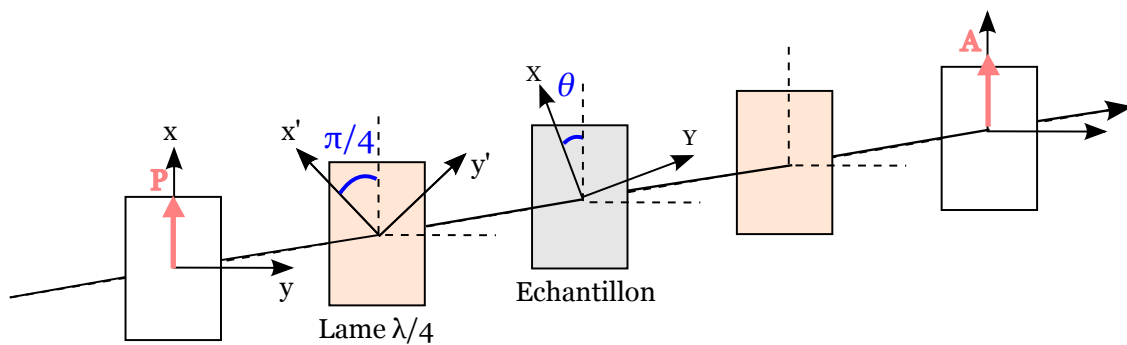
Les *isoclines* sont utiles pour déterminer, en tout point du matériau, la direction des contraintes principales. Par contre, elles gênent pour l'observation des *isochromes* qui, elles, servent pour déterminer quantitativement la valeur des différences de contraintes. On pourrait éliminer les *isoclines* en faisant tourner très vite le polariseur à l'aide d'un moyen mécanique. Par persistance rétinienne, on ne verrait que les *isochromes*. Il existe une solution plus pratique pour faire tourner la polarisation de l'onde incidente à grande vitesse. Il s'agit d'utiliser une lumière polarisée circulairement. On utilise pour cela deux lames quart d'onde placées en amont et en aval de l'échantillon.

### Le polariscope circulaire

Nous présentons dans ce paragraphe les résultats obtenus avec le polariscope circulaire. Il s'agit du même montage que précédemment auquel on ajoute deux lames quart d'onde situées avant et après l'échantillon (Fig. III.17). Les calculs, longs et fastidieux, sont présentés dans l'annexe A.

L'intensité lumineuse  $I$  en sortie du polariscope circulaire vaut :

$$I \propto \cos^2 \left( \frac{\phi}{2} \right) \quad (\text{III.27})$$



**FIG. III.17** – Schéma d'un polariscope circulaire constitué d'un polariseur  $P$ , d'une lame quart d'onde d'axe lent  $x'$ , de l'échantillon biréfringent, d'une deuxième lame quart d'onde d'axe lent  $y'$  et d'un analyseur  $A$ . Les axes de la lame quart d'onde sont inclinés de  $\pi/4$  par rapport à la direction du polariseur. Les axes optiques de biréfringence  $(X, Y)$  sont inclinés d'un angle  $\theta$  par rapport à la direction du polariseur.

En utilisant l'équation constitutive de la photoélasticité (Eq. III.23), on trouve que l'intensité lumineuse transmise par un corps photoélastique placé dans un polariscope circulaire est reliée aux contraintes par :

$$I \propto \cos^2 \left[ \frac{\pi e C}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) \right] \quad (\text{III.28})$$

Dans cette équation, il n'intervient plus de termes qui dépendent de  $\theta$  : il n'y a plus d'extinction due aux isoclines ni de possibilité de déterminer les directions propres. Cette relation est valable en tous points de l'échantillon.

## III.5 La calibration photoélastique

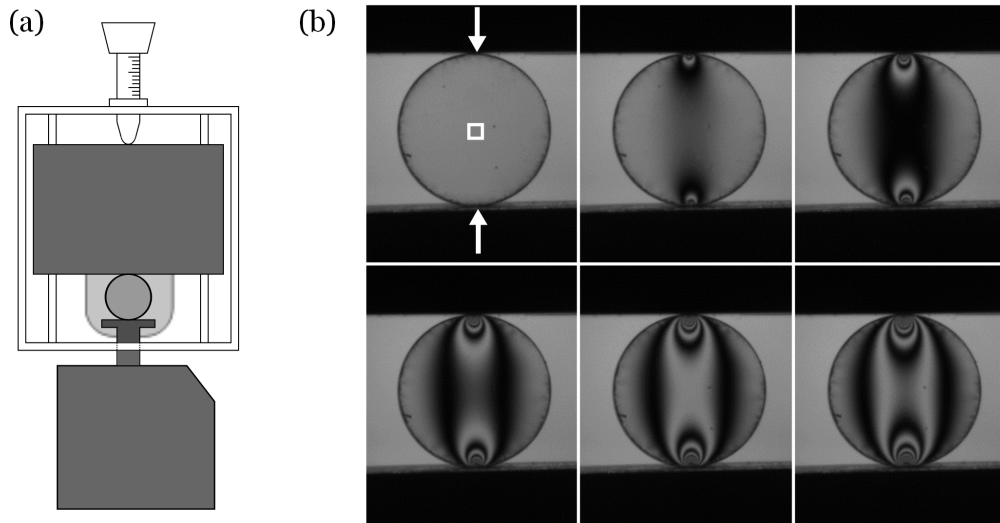
On appelle problème inverse de photoélasticité la procédure qui consiste à déterminer les vecteurs forces qui agissent sur un échantillon (dans notre cas un cylindre) à partir de son image photoélastique. Ce problème est extrêmement compliqué à résoudre [41, 115]. Généralement, on préfère utiliser des méthodes de calibration empiriques pour déterminer la force qui s'exerce à l'échelle du grain. Behringer *et coll.* ont élaboré une telle méthode [39, 40].

Durant ma thèse, j'ai mis au point et utilisé une autre méthode de calibration. Le principal avantage de celle-ci est qu'il suffit de mesurer l'intensité lumineuse au centre du grain (c'est-à-dire sur un nombre restreint de pixels) pour déterminer la force moyenne qu'y s'y exerce.

Le temps de calcul est ainsi très court, ce qui est un critère important quand on voudra suivre l'évolution de la force de plusieurs grains sur des milliers d'images successives.

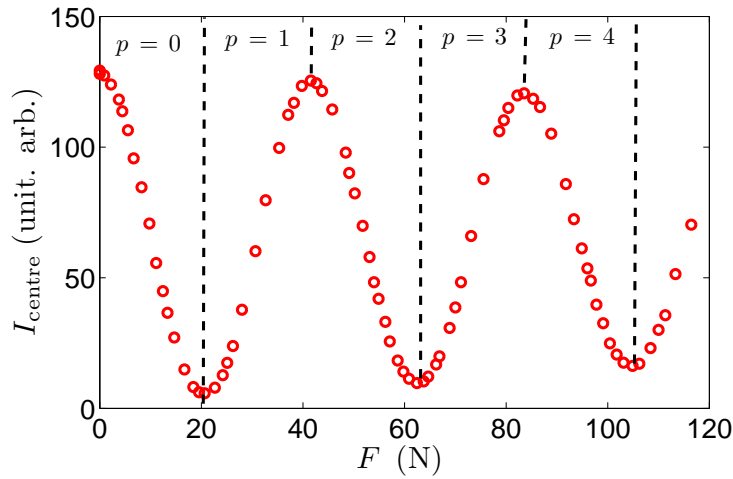
Cette méthode est valable lorsque les grains sont soumis à deux forces diamétralement opposées et d'intensité égales  $+F$  et  $-F$ . Ceci sera toujours vérifié dans nos expériences<sup>8</sup>.

L'idée de cette méthode est d'utiliser l'intensité lumineuse transmise par le centre du grain pour déterminer la force de compression  $F$  qui agit de chaque côté du grain. On effectue pour cela une calibration préalable. Le schéma de l'expérience est représenté Fig. III.18 et reprend le dispositif de la Fig. III.13.a.



**FIG. III.18** – (a) : Schéma de l'expérience. Le grain est placé sur le capteur de force et on le comprime à l'aide de la partie mobile de la platine. L'ensemble est placé dans un polariseur circulaire qui permet de visualiser les franges isochromes. Pour chaque force  $F$ , on prend une image photoélastique. (b) : Images photoélastiques obtenues pour des forces de compression de  $F = 0, 10, 20, 30, 40, 50 \text{ N}$  (de gauche à droite et de haut en bas). Pour la calibration, on mesure l'intensité lumineuse transmise par le centre du grain symbolisé par le carré blanc.

8. Pour les expériences à 1D en régime linéaire, cela sera toujours vérifié. Dans les expériences à 1D en régime non-linéaire, les forces qui s'exercent sur les grains seront toujours diamétralement opposées mais pas nécessairement d'intensité égales. Afin de déterminer l'amplitude de la force avec cette méthode de traitement, on sélectionnera une image particulière pour laquelle les forces qui agissent sur un grain particulier sont égales. Enfin, pour les empilements à 2D, cette méthode doit nous donner la force statique qui agit sur un grain le long d'une ligne de force. Pour ces empilements, un grain peut être soumis à des forces non diamétralement opposées. On ne prendra pas en compte ces grains pour déterminer la force statique moyenne dans la chaîne de force.



**FIG. III.19** – Mesure de l'intensité  $I_{\text{centre}}$  transmise par le centre du grain en fonction de la force  $F$  appliquée. Chaque demi-arche est repérée par un nombre entier  $p$  appelé l'ordre de la frange.

On place un grain sur le capteur de force et on vient le comprimer à l'aide de la partie mobile de la platine. Ainsi, le grain est soumis à deux forces diamétralement opposées et de même valeur  $F$  que l'on mesure avec le capteur de force. On a percé un trou dans la platine pour pouvoir éclairer le grain par derrière. La lumière est filtrée par un filtre rouge centrée autour de 650 nm. Le dispositif est placé dans un polariscope circulaire. Pour chacune des forces  $F$ , on prend une image du grain (figure III.18). On voit apparaître les franges isochromes.

On mesure l'intensité  $I_{\text{centre}}$  transmise par le centre du grain symbolisé par le carré blanc. Cette zone n'excède pas 1% de la surface totale du grain. On voit sur la courbe de la Figure III.19 que  $I_{\text{centre}}$  est une fonction sinusoidale à valeurs positives. On repère chaque demi-arche de cette oscillation par un nombre entier  $p$  nommé l'ordre de la frange. On peut écrire que l'intensité transmise  $I_{\text{centre}}$  par le centre du grain vaut :

$$I_{\text{centre}} = (I_{\text{max},p} - I_{\text{min},p}) \cos^2 \left[ \pi \frac{F}{\Delta F} \right] + I_{\text{min},p} \quad (\text{III.29})$$

$\Delta F$  correspond à l'incrément de force pour passer d'une frange noire (respectivement blanche) à la prochaine frange noire (respectivement blanche).  $I_{\text{max},p}$  correspond à l'intensité maximale transmise à l'ordre  $p$  et  $I_{\text{min},p}$  à l'intensité minimale résiduelle. On remarque que  $I_{\text{max},p}$  diminue et que  $I_{\text{min},p}$  augmente lorsque l'ordre  $p$  augmente. Cela vient du fait que le contraste diminue lorsque la différence de phase augmente. De plus, on conçoit aisément que  $I_{\text{max},p}$  et  $I_{\text{min},p}$  sont toutes deux des fonctions croissantes de l'intensité lumineuse de la

source. Pour s'en affranchir, on calcule à chaque ordre  $p$  l'intensité normalisée<sup>9</sup>  $\zeta$  :

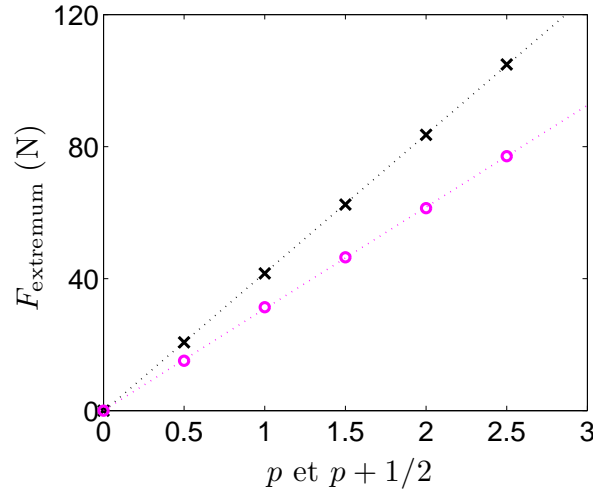
$$\zeta = \frac{(I_{\text{centre}} - I_{\text{min},p})}{(I_{\text{max},p} - I_{\text{min},p})} = \cos^2 \left[ \pi \frac{F}{\Delta F} \right] \quad (\text{III.30})$$

Par construction,  $\zeta$  varie entre 0 et 1 pour chaque ordre  $p$ .

On obtient :

$$\zeta = \begin{cases} 1 & \text{si } F = p\Delta F \\ 0 & \text{si } F = (p + 1/2)\Delta F \end{cases} \quad \text{avec } p = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{III.31})$$

On a tracé Fig. III.20 les forces  $F_{\text{extremum}}$  pour lesquelles  $\zeta$  (équivalent à  $I_{\text{centre}}$ ) est extrémale en fonction de  $p$  et  $p + 1/2$ . La pente nous donne la valeur de  $\Delta F$ . On obtient  $\Delta F_1 = 42 \text{ N}$  pour les cylindres de diamètre  $d_1 = 13 \text{ mm}$  et  $\Delta F_2 = 31 \text{ N}$  pour ceux de diamètre  $d_2 = 9.6 \text{ mm}$ .



**FIG. III.20** – Détermination de  $\Delta F$ . On reporte la force  $F_{\text{extremum}}$  pour laquelle  $\zeta$  est maximale (et minimale) en fonction de  $p$  (et  $p + 1/2$ ). La pente donne  $\Delta F$ . On a effectué la mesure pour les grains de diamètre 13 mm ( $\times$ ) et 9.6 mm ( $\circ$ ). On trouve  $\Delta F_1 = 42 \text{ N}$  et  $\Delta F_2 = 31 \text{ N}$ .

En comparant les équations III.27 et III.30, on trouve l'expression de  $\Delta F$  :

$$\Delta F = \frac{2R\lambda}{C} \quad (\text{III.32})$$

Pour les grains de rayons différents, on a :

---

9. Naturellement,  $\zeta$  a exactement la même allure que  $I_{\text{centre}}$ .

$$\frac{\Delta F_1}{\Delta F_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (\text{III.33})$$

Expérimentalement, avec les valeurs mesurées, on trouve :  $\frac{\Delta F_1}{\Delta F_2} \approx 1.35$ . Quant au rapport des rayons :  $\frac{R_1}{R_2} = 1.35$ . On a donc bien retrouvé expérimentalement la proportionnalité prévue entre  $\Delta F$  et  $R$ .

On a obtenu une relation de calibration entre la force de compression  $F$  et l'intensité lumineuse  $\zeta$  (ou  $I_{\text{centre}}$ ) transmise par le centre du grain. Il est important de noter que la courbe d'étalonnage de la Fig. III.19 est multivaluée, c'est-à-dire qu'à une même valeur mesurée de  $\zeta$  (ou  $I_{\text{centre}}$ ) correspond plusieurs forces de compression  $F$ . Pour lever l'indétermination, il faut connaître l'ordre  $p$  où l'on se trouve. Il suffit pour cela de regarder en dehors de la zone centrale et de compter le nombre de franges que l'on a franchies. En régime linéaire<sup>10</sup>, la variation de force due au passage de l'onde étant très petite, elle ne suffira pas à franchir une frange ; on restera au même ordre qu'à l'état initial lorsque la chaîne est soumise à la force statique de confinement  $F_0$ . Il suffit donc de déterminer l'ordre  $p$  avec l'image à  $t = 0$ .

Le membre de gauche de l'Equation III.30,  $\zeta$ , est accessible expérimentalement tandis qu'on cherche à déterminer la force  $F$  du membre de droite. Pour trouver la force de compression  $F$ , il suffit de calculer :

$$F = \Delta F \left[ m + \frac{(-1)^p}{\pi} \arccos(\sqrt{\zeta}) \right] \quad \text{avec } m = \begin{cases} p/2 & \text{si } p \text{ pair} \\ (p+1)/2 & \text{si } p \text{ impair} \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

A partir de cette équation, on est en mesure de déterminer la force qui agit sur un grain à partir de son image photoélastique. Cette détermination nécessite de connaître  $\Delta F$  (résultat obtenu par la calibration), de mesurer expérimentalement  $\zeta$  et de déterminer  $m$  et  $p$ .

Pour résumer, je récapitule les différentes étapes pour déterminer la force de compression  $F$  à partir des images photoélastiques :

- on a l'image photoélastique d'un grain comprimé par une force  $F$  inconnue
- prendre deux images correspondant aux fanges blanches et aux franges noires d'ordre  $p$
- déterminer l'ordre  $p$  de la frange. Pour cela, on compte le nombre de franges sur l'ensemble du grain

---

10. Cela ne sera pas vrai lorsque on s'intéressera aux ondes de grandes amplitudes où le passage de l'onde dans un grain lui fera franchir plusieurs ordres  $p$ . On verra ultérieurement comment on a procédé pour connaître l'ordre  $p$  de la frange.

---



- mesurer, au centre du grain,  $I_{\text{centre}}$ ,  $I_{\text{max},p}$  et  $I_{\text{min},p}$
- calculer  $\zeta$  (Eq. III.30)
- calculer  $F$  (Eq. III.34)
- vérifier que la valeur trouvée de  $F$  est cohérente avec l'ordre  $p$  supposé au préalable

# Chapitre IV

## Ondes sonores en régime linéaire dans une chaîne unidimensionnelle de cylindres

### Sommaire

---

<b>IV.1 Dispositif expérimental . . . . .</b>	<b>88</b>
IV.1.1 Le dispositif . . . . .	88
IV.1.2 Le protocole . . . . .	90
IV.1.3 Le traitement d'images . . . . .	92
<b>IV.2 Propagation de l'onde sonore en régime linéaire . . . . .</b>	<b>93</b>
IV.2.1 Le modèle de masses et de ressorts . . . . .	94
IV.2.2 Propriétés de l'onde . . . . .	95
IV.2.3 La vitesse des ondes en régime linéaire . . . . .	98
<b>IV.3 Essais sur d'autres types de grains . . . . .</b>	<b>102</b>
IV.3.1 Chaîne unidimensionnelle de cylindres en acier . . . . .	102
IV.3.2 Chaîne unidimensionnelle de parallélépipèdes . . . . .	104
<b>IV.4 La dissipation . . . . .</b>	<b>106</b>
<b>IV.5 Résumé des résultats obtenus . . . . .</b>	<b>109</b>

---

Nous étudions dans ce chapitre la propagation d'ondes sonores en régime linéaire dans des empilements granulaires unidimensionnels. Comme nous l'avons déjà mentionné, l'intérêt d'une chaîne unidimensionnelle est de tester l'effet de la loi de contact entre les grains sur la dépendance de la vitesse des ondes avec la force de confinement. Dans la majeure partie de ce chapitre, notre étude concerne une chaîne de cylindres en polycarbonate. Nous allons suivre la propagation de l'onde grâce à la photoélasticité. Cette étude a donné lieu à deux publications [116, 117]. Nous étudions la vitesse des ondes et la dissipation qui accompagne la propagation. A la fin de ce chapitre, je présente également, à titre comparatif, des résultats obtenus avec des cylindres en acier et des grains en polycarbonate mais de géométries différentes.

## IV.1 Dispositif expérimental

### IV.1.1 Le dispositif

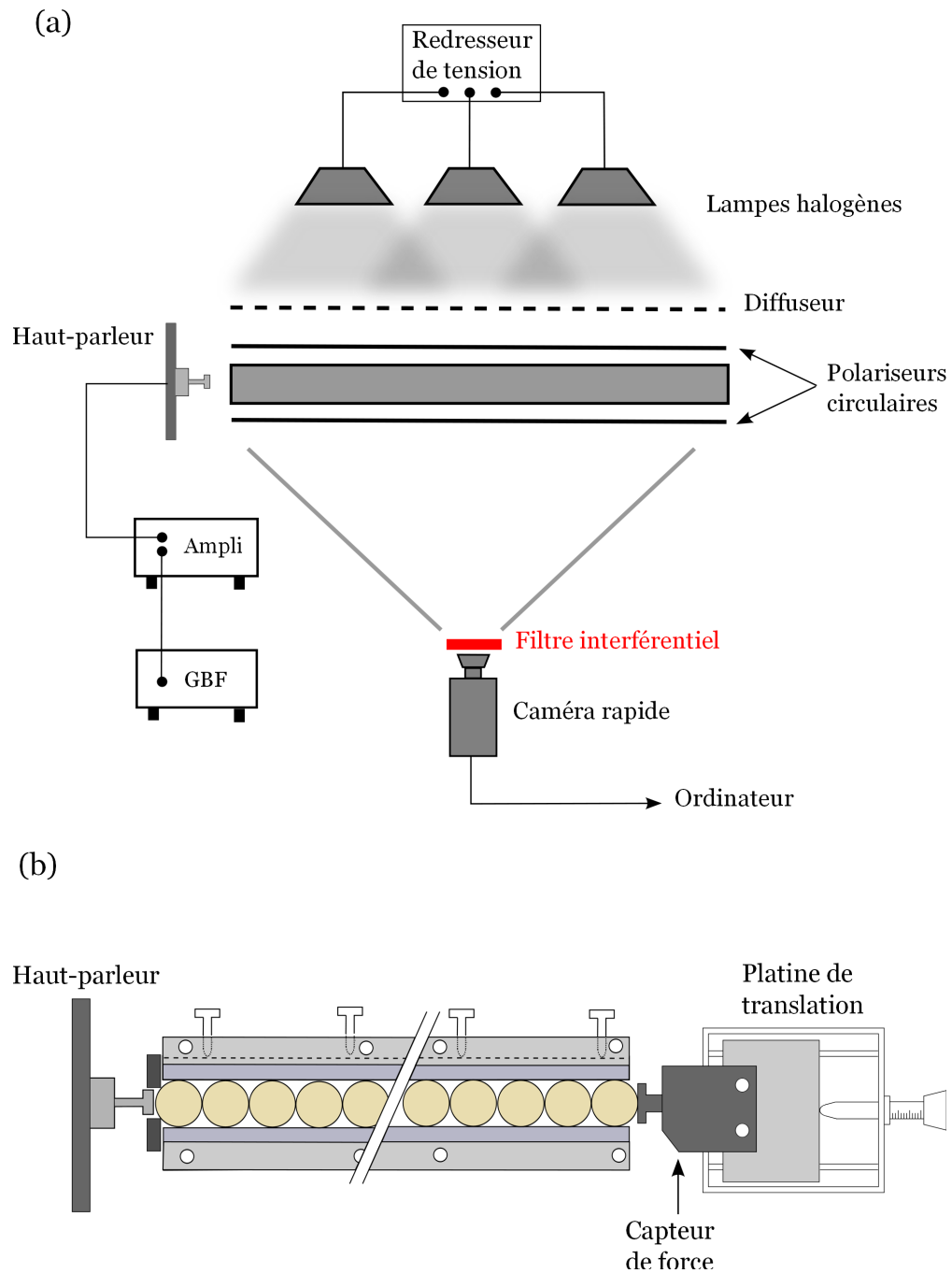
Le système étudié est constitué de 36 cylindres, photoélastiques et de diamètres identiques. La description du dispositif expérimental a été en partie présentée à la Sec. III.3.1. Pour empêcher la chaîne de flamber, on contraint les grains verticalement. On utilise ici la méthode 1 (cf. Sec. III.3.1) à l'aide des vis qui appuient sur la plaque en duraluminium. Cela permet de comprimer la chaîne avec une force statique  $F_0$  allant jusqu'à 100 N.

Le dispositif est éclairé à l'aide de trois projecteurs halogènes comme illustré sur la Fig. IV.1. On annule quasiment la composante alternative de l'alimentation des lampes à l'aide d'un montage redresseur de tension. Sur la face intérieure des deux vitres, on a fixé les polariseurs circulaires. La lumière passe successivement la première vitre, le système polariseur-lame quart d'onde, les grains photoélastiques, le deuxième système polariseur-lame quart d'onde, la deuxième vitre et ensuite passe par un filtre interférentiel rouge centré autour de 650 nm et placé juste devant l'objectif de la caméra. On utilise une caméra ultra-rapide Phantom V7.3 (VISION RESEARCH) pour suivre, par photoélasticité, la propagation du pulse le long de la chaîne. Dans cette série d'expériences, la caméra acquiert 88956 images par seconde (soit  $11.5 \mu\text{s}$  entre deux images) avec une résolution de  $736 \times 32$  pixels. On ne filme pas toute la chaîne : on visualise environ 25 grains et le premier grain sur les images<sup>1</sup> correspond au troisième grain dans la chaîne.

---

1. On verra un peu plus tard que le premier grain apparent sur l'image est noté  $n = 1$ .

---



**FIG. IV.1** – Schéma du dispositif expérimental utilisé pour les expériences de propagation en régime linéaire. (a) : vue de haut; (b) : vue de face.

A une extrémité de la chaîne, on place un haut-parleur alimenté par un générateur. On a collé sur la bobine du haut-parleur une petite pièce métallique qui se termine par une tige métallique d'environ 1 cm de longueur<sup>2</sup>. En fonctionnement, cette tige vient impacter

2. On a fait en sorte que la masse rajoutée soit la plus petite possible pour ne pas trop augmenter l'inertie du haut parleur.

le premier grain de la chaîne et ainsi créer la perturbation. A l'autre extrémité, on retrouve le capteur de force statique monté sur une platine de translation horizontale. Cette platine permet de comprimer la chaîne et de mesurer la force de confinement statique  $F_0$ . Cette mesure est complémentaire de la mesure indirecte effectuée avec les images photoélastiques.

### IV.1.2 Le protocole

L'expérience se réalise de la façon suivante. On place les grains dans la gorge du bâti prévue à cet effet. On pose par dessus la pièce supérieure en duraluminium qui sert à empêcher la chaîne de flamber. En fonction de la force statique  $F_0$  à laquelle on travaille, on ajuste le serrage vertical avec les vis en nylon : pas trop important pour éviter le frottement des grains avec la paroi, mais suffisamment pour éviter le flambage de la chaîne. On translate le capteur de force à l'aide de la platine pour comprimer les grains à la force de confinement  $F_0$  voulue. On alimente le haut-parleur par une impulsion de largeur typique  $100\ \mu\text{s}$  : il impacte le premier grain de la chaîne et génère ainsi le pulse acoustique. On enregistre un film avec la caméra rapide. Une séquence d'images<sup>3</sup> est montrée sur la figure IV.2. A l'état initial, les grains sont comprimés à une force  $F_0$  comme en témoigne les franges qui se forment au niveau de chaque contact. Puis l'onde est générée et se propage de grain en grain. Le pulse est constitué d'une phase de compression (couleur foncée) suivi par une phase où les grains sont moins comprimés qu'à l'état initial (couleur claire). Chaque image est séparée par  $115\ \mu\text{s}$ .

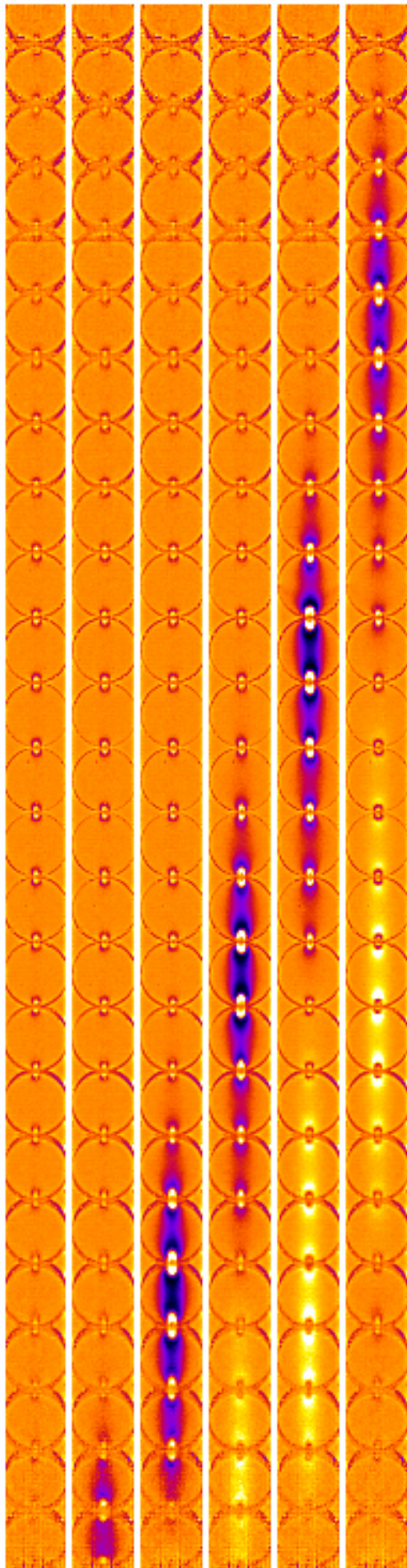
Pour accéder à l'évolution de la force via la méthode de calibration présentée au § III.5, il faut connaître  $I_{\text{max},p}(n)$  et  $I_{\text{min},p}(n)$  pour chaque grain  $n$ . Pour cela, on se place successivement aux deux forces correspondant au minimum et au maximum d'intensité transmise à l'ordre  $p$  et on prend une image<sup>4</sup>.

---

3. Pour cette séquence d'images, on n'est pas exactement dans le régime linéaire car l'amplitude de l'onde n'est pas extrêmement petite par rapport à la force statique de confinement. Lorsque tel est le cas, les variations d'intensité lumineuse dues au passage de l'onde ne sont pas flagrantes à l'oeil nu. C'est pour cela que j'ai choisi de montrer une séquence d'images où l'amplitude de l'onde n'est pas trop petite comparée à  $F_0$ . Cela ne change rien à la discussion sur le traitement d'images. Par contre, on ne prendra pas en compte ce type de films lorsqu'on étudiera les propriétés de la propagation de l'onde en régime linéaire.

4. Précisons que tous les grains de la chaîne atteignent simultanément les maximums ou minimums d'intensité. Cela pourrait ne pas être le cas si les frottements solides étaient très importants, de sorte que la force statique qui agirait sur chaque grain serait différente.

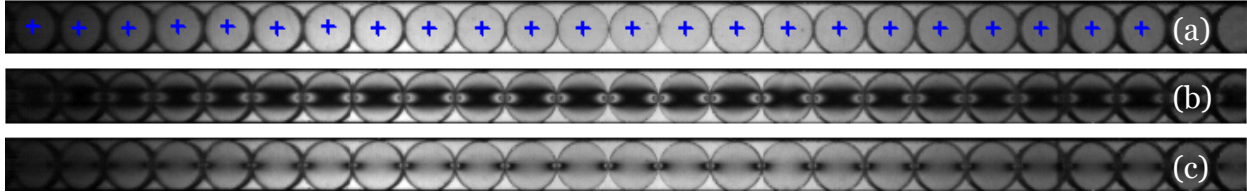
---



**FIG. IV.2** – Exemples de six images, en fausses couleurs, montrant la propagation de l'onde sonore dans une chaîne unidimensionnelle de cylindres photoélastiques. Les grains sont soumis à une force de confinement statique  $F_0 = 8\text{ N}$  et l'amplitude de l'onde vaut  $5\text{ N}$ . Chaque image est séparée de  $115\text{ }\mu\text{s}$ . Une couleur foncée signifie que les grains sont davantage comprimés qu'à l'état initial tandis qu'une couleur claire signifie que les grains sont moins comprimés.

### IV.1.3 Le traitement d'images

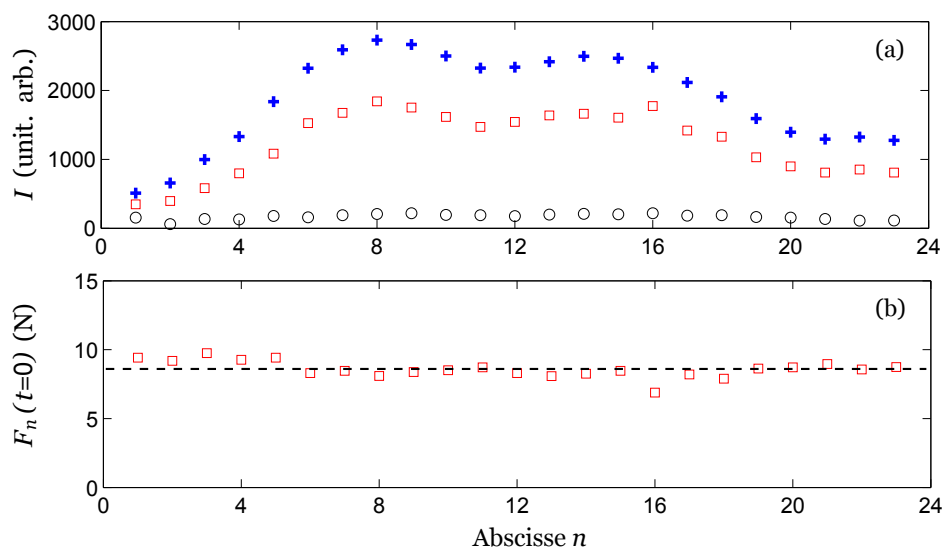
Nous souhaitons déterminer l'évolution de la force qui agit sur chaque grain en fonction du temps. Nous allons pour cela utiliser la calibration photoélastique présentée au § III.5. Prenons pour exemple une expérience effectuée à une force  $F_0$  situé à l'ordre  $p = 0$ . C'est le cas de la séquence d'images sur la Fig. IV.2. On dispose des deux images qui correspondent à la frange blanche et à la frange noire de l'ordre  $p = 0$ , et du film constitué de  $N$  images. Typiquement,  $N$  vaut quelques milliers d'images. La Fig. IV.3 montre trois images : la frange blanche de l'ordre  $p = 0$ , la frange noire de l'ordre  $p = 0$  et une image de la chaîne à l'état initial soumis à la force  $F_0$ .



**FIG. IV.3** – *Traitement d'images pour déterminer la force en fonction du temps qui s'exerce sur chaque grain  $n$ . On utilise pour cela la calibration photoélastique qui nécessite de connaître  $I_{\max,p}(n)$  et  $I_{\min,p}(n)$ . (a) : Frange blanche de l'ordre  $p = 0$ ; (b) : frange noire de l'ordre  $p = 0$ ; (c) : Image  $N = 1$  correspondant à la chaîne soumise à la force  $F_0$ . Les croix (+) symbolisent le centre de chaque grain.*

A l'aide du logiciel **ImageJ**, on détermine le centre de chaque grain. Avec cette résolution spatiale, un diamètre de 13 mm correspond à 26 pixels. La suite du traitement d'images se fait avec des programmes écrits avec le logiciel **Matlab**. Pour chacun des centres des grains symbolisé par une croix (+), on mesure puis on moyenne l'intensité lumineuse transmise par un petit carré de 5 pixels de côté centré sur le centre du grain. On procède à cette étape pour chaque centre  $n$  et pour chaque image  $N$  du film. On obtient ainsi une matrice  $I$  de  $n$  lignes et  $N$  colonnes. La figure IV.4.a présente les résultats associés à la figure IV.3 pour la mesure de  $I_{\max,p}$ , de  $I_{\min,p}$  et de  $I(n, N = 1)$ . On s'aperçoit que  $I_{\min,p}$  est constante pour tous les grains de la chaîne, ce qui n'est pas le cas de  $I_{\max,p}$ .  $I_{\max,p}$  prend des valeurs plus grandes au centre de la chaîne, là où la lumière issue des trois lampes halogènes se superposent (cf. Fig IV.1).

A partir de la matrice  $I(n, N)$ , de  $I_{\max,p}$ , et de  $I_{\min,p}$ , on calcule les éléments de la matrice  $\zeta(n, N)$  (Eq. III.30) puis ceux de la matrice  $F(n, N)$  (Eq. III.34). On dispose ainsi de la force qui agit sur les  $n$  grains de la chaîne pour les  $N$  images du film. Dans la suite du manuscrit,



**FIG. IV.4** – (a) : Intensité lumineuse transmise par chacun des  $n$  centres symbolisés par une croix sur la Fig. IV.3. Les symboles représentent  $I_{\max, p}$  (+),  $I_{\min, p}$  (○) et  $I(n, N=1)$  (□); (b) : Force  $F_n(t=0)$  déterminée par la mesure photoélastique qui s'exerce sur les  $n$  grains de la chaîne à l'état initial. La moyenne de ces valeurs, en pontillés, donne  $F_0$ .

on adoptera la notation  $F_n(t)$  plutôt que  $F(n, N)$  pour désigner la force qui s'exerce sur le grain  $n$  au temps  $t = (N-1)/86956$ . Sur la figure IV.4.b, on a tracé  $F_n(t=0)$ , la force pour les  $n$  grains à l'état initial.

La moyenne de ces points nous donne  $F_0$ , *i.e* :

$$\langle F_n(t=0) \rangle = F_0 \quad (\text{IV.1})$$

Dans ce cas, on trouve  $F_0 = 8.6 \pm 0.6\text{N}$ . La mesure de la force obtenue par la méthode photoélastique est toujours comparée à celle donnée par le capteur de force statique. L'accord entre ces deux valeurs est très bon, ce qui valide notre protocole.

## IV.2 Propagation de l'onde sonore en régime linéaire

On s'intéresse dans ce paragraphe à la propagation d'ondes sonores dans une chaîne 1D de cylindres en régime linéaire. Cela suppose que l'amplitude de l'onde est très petite par rapport à la force de confinement statique  $F_0$  qui s'exerce sur chacun des grains. Comme on l'a déjà vu dans le cas d'une chaîne de sphères, la propagation va être régie par la loi



de contact entre les grains. Cette étude est intéressante et nouvelle car il s'agit de grains cylindriques, ce qui change la loi de contact et affecte donc ainsi les propriétés de l'onde.

### IV.2.1 Le modèle de masses et de ressorts

Pour modéliser la propagation d'une onde sonore dans une chaîne unidimensionnelle de cylindres, on utilise le même modèle que pour une chaîne de sphères (Sec. II.1.2.1), c'est-à-dire une association de masses et de ressorts. La différence est que les ressorts sont ici régis par la loi de l'Eq. III.17.

On aboutit à la même relation de dispersion :

$$\omega = 2\sqrt{\frac{\kappa}{M}} |\sin(qR)| \quad (\text{IV.2})$$

où  $M = \pi R^2 L \rho$  est la masse d'un grain et  $\kappa = \partial F / \partial \delta$  la raideur du contact.

Dans la limite des grandes longueurs d'ondes, on en déduit la vitesse  $c_s$  des ondes acoustiques :

$$c_s = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\omega}{q} = 2R\sqrt{\frac{\kappa}{M}} \quad (\text{IV.3})$$

Pour calculer la raideur  $\kappa$  d'un contact, on dérive la relation «  $F - \delta$  » propre aux cylindres. Pour les cylindres en polycarbonate, on a obtenu deux relations «  $F - \delta$  » : l'une théorique (Eq. III.17) et l'autre expérimentale (Fig. III.14 et Eq. III.22). On calcule donc deux raideurs  $\kappa_{th}$  et  $\kappa_{exp}$  à partir de ces deux lois.

La loi théorique donne  $\kappa_{th}$  :

$$\kappa_{th} = \frac{\partial F}{\partial \delta} = \frac{\pi E L}{2(1 - \nu^2)} \left[ \log \left( \frac{4\pi E R L}{(1 - \nu^2) F} \right) - 2 \right]^{-1} \quad (\text{IV.4})$$

A partir de l'Eq. III.22 déterminée expérimentalement, on trouve :

$$\kappa_{exp} \propto \begin{cases} F^{0.44} & \text{pour } F_0 < 20 \text{ N} \\ F^{0.27} & \text{pour } F_0 > 20 \text{ N} \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

Par souci de simplicité, on n'a pas fait figurer ici le préfacteur numérique.

### IV.2.2 Propriétés de l'onde

On génère une onde par l'impact entre la tige montée sur le haut-parleur et le premier grain de la chaîne. On se place dans le cadre du régime linéaire, ce qui implique que l'amplitude du pulse est petite devant la force  $F_0$ .

La figure IV.5 montre la propagation de l'onde sonore dans la chaîne de cylindres sous contrainte. Puisque l'amplitude de l'onde est très petite devant la force statique, les variations d'intensité lumineuse dues au passage de l'onde sont quasiment imperceptibles à l'oeil<sup>5</sup>. Pour remédier à cela, on a soustrait aux  $N$  images du film l'image de référence  $N = 1$  pour ne voir que la perturbation se propager.

On réalise le traitement d'images décrit au paragraphe précédent : on obtient la force en fonction du temps pour les  $n$  grains. La figure IV.6 représente l'allure de la force dynamique  $F_n(t)$  pour les grains<sup>6</sup>  $n = 8, 13, 18, 23$ . Avant que l'onde n'arrive, tous les grains sont soumis à la même force statique  $F_0$ . Le pulse acoustique arrive au grain  $n$ , la force augmente, atteint son maximum et diminue. On remarque, sur les figures IV.5 et IV.6, que la phase de compression est suivie d'une phase où la force  $F_n(t)$  devient momentanément inférieure à  $F_0$ . Enfin, on remarque que l'amplitude maximale de l'onde diminue au cours de la propagation. On étudiera cet aspect au paragraphe IV.4.

Dans la suite, on décompose la force en deux parties : la partie statique  $F_0$  et la partie variable  $f_n$  due au passage de l'onde :

$$F_n(t) = F_0 + f_n(t) \quad (\text{IV.6})$$

On introduit également l'amplitude maximale  $f_{n,\max}$  du pulse au grain  $n$  par la relation :

$$f_{n,\max} = \max [F_n(t) - F_0] \quad (\text{IV.7})$$

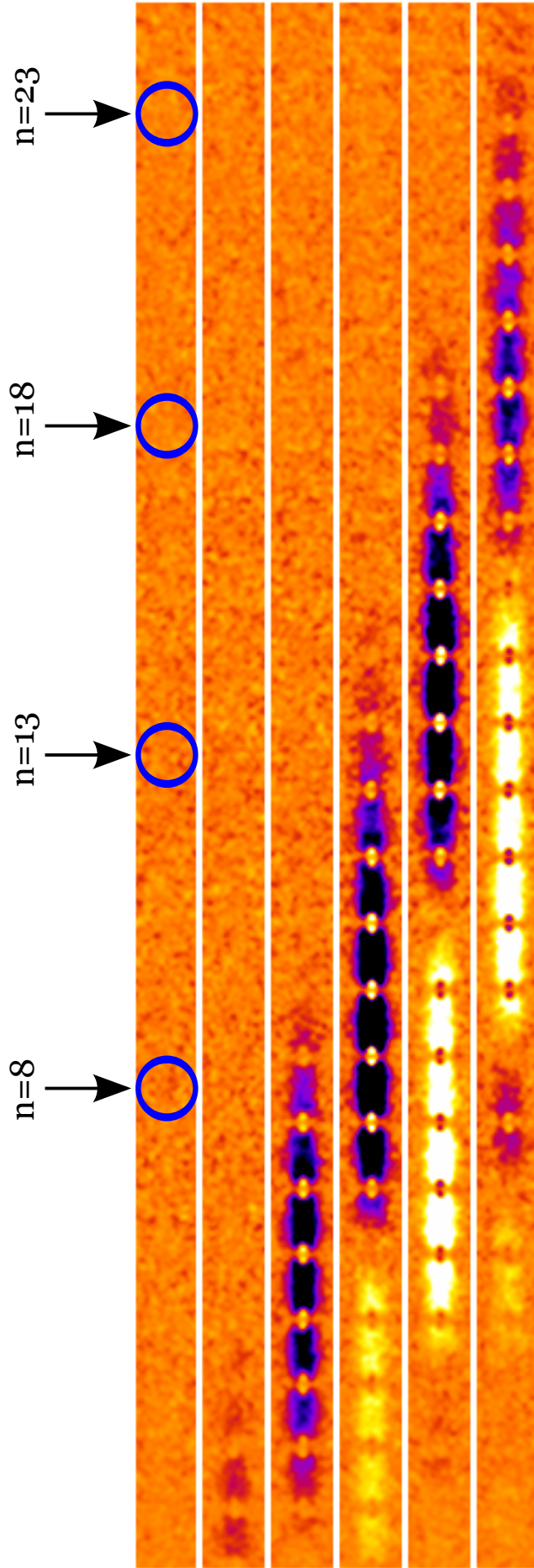
Dans cet exemple, on trouve :  $F_0 = 10 \text{ N}$  et  $f_{1,\max} = 1.3 \text{ N}$ . L'hypothèse du régime linéaire est vérifiée.

---

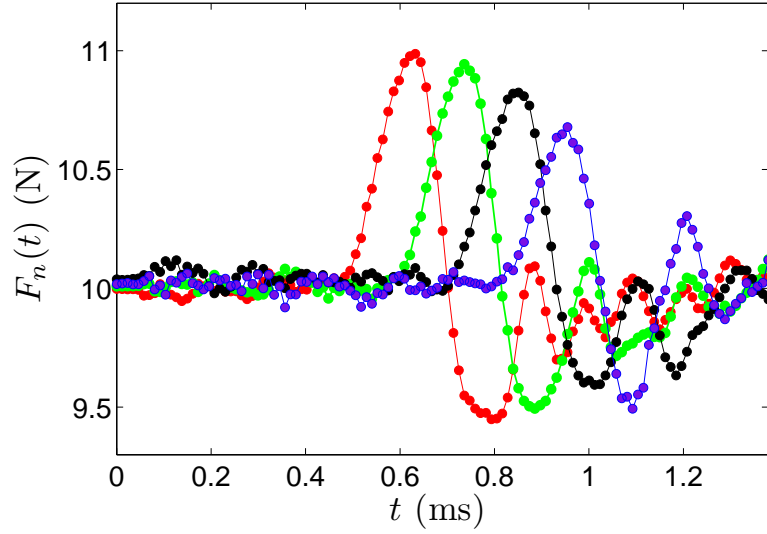
5. Mais suffisant pour être détectées par le traitement d'images informatique.

6. Je rappelle que ce que je note  $n = 1$  correspond au premier grain de l'image mais qui est en fait le troisième grain de la chaîne.

---



**FIG. IV.5** – Exemples de six images, en fausses couleurs, montrant la propagation de l'onde sonore en régime linéaire. Puisque la variation d'intensité lumineuse due au passage de l'onde est très faible, on a soustrait à chaque image l'image de référence correspondant à  $t = 0$ . Cela permet de ne voir que la perturbation. Chaque image est séparée de  $115 \mu\text{s}$  et les paramètres de l'expérience sont  $F_0 = 10 N$  et  $f_{1,\text{max}} = 1.3 N$ . Les cercles bleus correspondent aux grains dont on a tracé l'évolution de  $F_n(t)$  sur la Fig. IV.6.



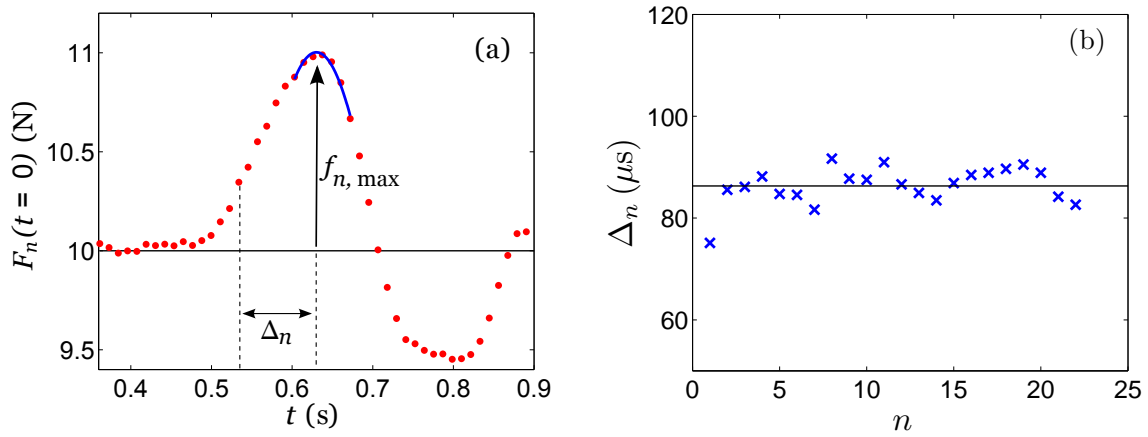
**FIG. IV.6** – Force  $F_n(t)$  pour les grains  $n = 8, 13, 18, 23$  en fonction du temps. Ces courbes correspondent à la séquence d'images de la Fig. IV.5 et sont obtenues grâce à notre traitement d'images. Les paramètres de l'expérience sont  $F_0 = 10\text{ N}$  et  $f_{1,\text{max}} = 1.3\text{ N}$ . Avant que l'onde n'arrive, on voit que tous les grains sont soumis à la même force  $F_0$ . Le pulse acoustique arrive au grain  $n$ , la force augmente, atteint son maximum et diminue. On remarque que le pulse est suivi d'une phase où la force devient inférieure à  $F_0$ . Ensuite la force redevient égale à  $F_0$ .

Sur la figure IV.5, on constate que la largeur spatiale du pulse est d'environ 8 grains. On peut donc légitimement penser que l'onde ne sentira pas les effets du caractère discret de la chaîne. En prenant une longueur d'onde égale à 8 grains, on trouve  $\sin(qR) = 0.38$  et  $qR = 0.39$ , soit une différence inférieure à 3%. On peut donc raisonnablement linéariser la relation de dispersion et prétendre que le milieu de propagation sera non-dispersif pour ce type de pulse en régime linéaire.

On a cherché à mesurer la largeur temporelle du pulse. On mesure la largeur du pulse entre le point d'amplitude maximum et le point au tiers de l'amplitude<sup>7</sup>. Cela définit la demi-largeur  $\Delta_n$  du pulse au grain  $n$ . Pour repérer avec davantage de précisions l'instant du maximum du pulse et la valeur du maximum  $f_{n,\text{max}}$ , on ajuste les points expérimentaux au niveau du sommet du pulse par une parabole (Fig. IV.7.a). On se base sur les valeurs du fit parabolique pour mesurer à la fois le maximum du pulse<sup>8</sup>  $f_{n,\text{max}}$  et l'instant où le pulse atteint ce maximum. La mesure de  $\Delta_n$  est présentée sur la figure IV.7.b. Cette mesure montre

7. Cette définition est un choix arbitraire. On aurait aussi pu mesurer la largeur entre le point d'amplitude maximale et le point à mi-hauteur.

8. Cela sera utilisé lorsqu'on étudiera la décroissance du pulse dans la section IV.4.



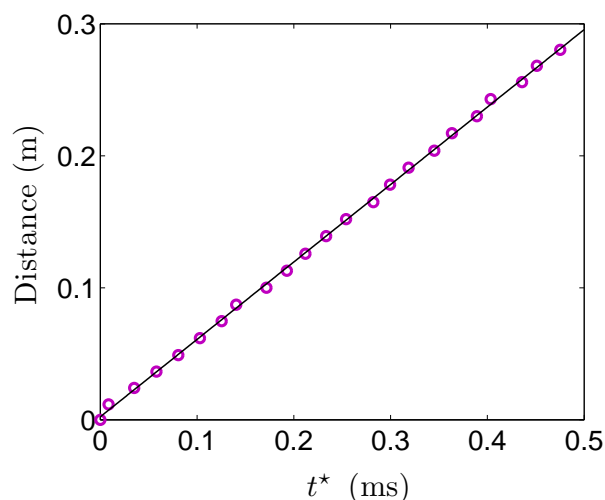
**FIG. IV.7** – (a) : Définition de la demi-largeur  $\Delta_n$  du pulse. On mesure la largeur temporelle entre le point où la force est maximale et le point où la force est égale au tiers de son amplitude maximale. Pour améliorer les mesures, on effectue une approximation parabolique du sommet du pulse (trait plein). C’est à partir de ce fit qu’on déduit la valeur du maximum de l’onde  $f_{n,\max}$  et l’instant où le grain atteint ce maximum; (b) : Mesure de la demi-largeur  $\Delta_n$  du pulse le long de la chaîne. Les fluctuations de largeur du pulse sont inférieures au temps d’échantillonnage de la caméra. On peut donc affirmer que l’onde a une largeur temporelle constante et qu’elle se propage sans s’étaler. Ici on mesure  $\langle \Delta_n \rangle = 86 \pm 4 \mu\text{s}$ .

que la largeur  $\Delta_n$  est constante au cours de la propagation; en effet les fluctuations sont inférieures au temps d’échantillonnage de la caméra. Cela confirme que le pulse se propage sans s’étaler. Ici on mesure  $\langle \Delta_n \rangle = 86 \pm 4 \mu\text{s}$ .

### IV.2.3 La vitesse des ondes en régime linéaire

On souhaite mesurer l’évolution de la vitesse  $c_s$  des ondes linéaires avec la force de confinement statique  $F_0$ . Puisque le pulse se propage sans s’étaler, il suffit de suivre la distance parcourue par un point de référence du pulse en fonction du temps. C’est la méthode du *temps de vol*. On choisit de prendre comme point de référence le point à mi-hauteur du pulse. En effet, c’est en ce point que la force change le plus rapidement et que la mesure est la plus précise. En pratique, pour chaque grain  $n$  de la chaîne, on cherche le temps  $t^*$  pour lequel  $F_n(t^*) = F_0 + f_{n,\max}/2$ . La figure IV.8 montre la mesure du temps de vol en fonction de la distance pour la séquence d’images de la figure IV.5.

On remarque que la distance parcourue par l’onde dépend linéairement du temps  $t^*$ ; la pente de cette droite donne donc la vitesse de l’onde  $c_s$ . Pour cet exemple, on trouve



**FIG. IV.8** – Distance parcourue par le point à mi-hauteur du pulse en fonction du temps  $t^*$ . En pratique, pour chaque grain  $n$ , on cherche le temps  $t^*$  pour lequel  $F_n(t^*) = F_0 + f_{n,\max}/2$ . Le trait plein est la régression linéaire qui donne la vitesse du pulse dans la chaîne.

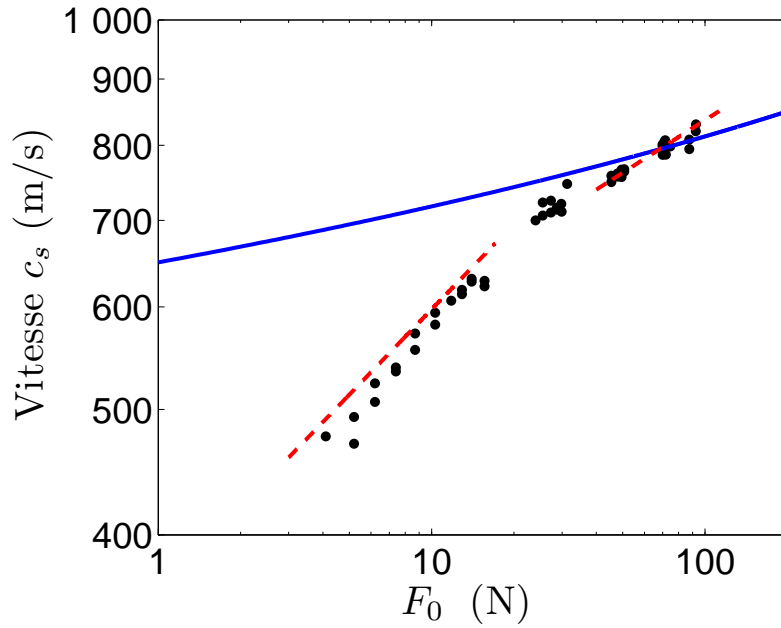
$c_s = 594 \text{ m/s}$ . On peut en déduire la largeur spatiale du pulse ; cette largeur spatiale est la largeur temporelle  $\langle \Delta_n \rangle$  multipliée par la vitesse  $c_s$ , soit  $594 \text{ m/s} \times 172 \mu\text{s} \approx 8$  grains. On retrouve la largeur déduite de la figure IV.5.

On réitère la même démarche en faisant varier la force statique  $F_0$  : on obtient ainsi l'évolution de la vitesse  $c_s$  avec  $F_0$ . Les résultats sont présentés sur la figure IV.9 en échelles logarithmiques.

Les points expérimentaux montrent que la vitesse  $c_s$  augmente lorsque la force de confinement statique augmente : la vitesse passe de  $450 \text{ m/s}$  à  $850 \text{ m/s}$  entre  $F_0 = 2 \text{ N}$  et  $F_0 = 95 \text{ N}$ . On note également qu'elle est inférieure à la vitesse du son dans le matériau *bulk* qui est de l'ordre de  $2000 \text{ m/s}$ .

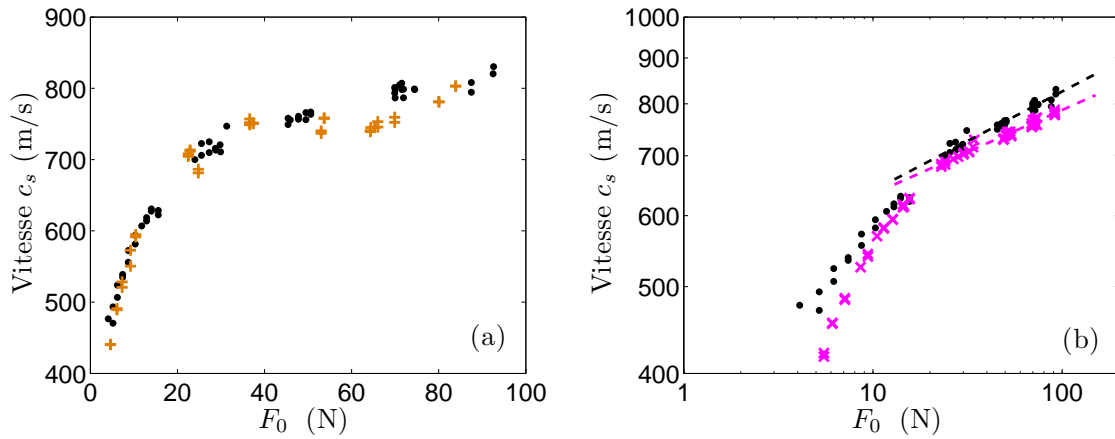
On voit clairement apparaître deux régimes sur cette figure. On appelle  $F_c$  la force où se produit le changement de comportement. D'après cette figure, on a  $F_c \approx 20 \text{ N}$ . Pour  $F_0 < F_c$ , la vitesse augmente rapidement avec la force statique. En supposant une dépendance en loi de puissance du type  $c_s \propto F_0^\beta$ , on trouve dans cette zone  $\beta \approx 1/4$ . Pour  $F_0 > F_c$ , la dépendance de  $V$  avec  $F_0$  est beaucoup plus faible. On trouve  $\beta \approx 1/9$ . La force de transition entre ces deux régimes se produit à une force similaire à celle pour la transition des lois «  $F_0 - S$  » et «  $F_0 - \delta$  ». On reviendra sur ce point au paragraphe IV.5.

Nous allons comparer nos mesures directes de vitesse avec les prédictions indirectes



**FIG. IV.9** – Evolution, en échelles log – log, de la vitesse  $c_s$  des ondes acoustiques dans une chaîne unidimensionnelle de cylindres en fonction de la force statique de confinement  $F_0$ . Il apparaît clairement deux régimes séparés par une force  $F_c \approx 20$  N. Dans chacun des deux régimes, on cherche une loi du type  $c_s \propto F_0^\beta$ . En dessous de  $F_c$ , la vitesse augmente rapidement avec la force et on mesure localement un exposant  $\beta \approx 1/4$ . Au dessus de  $F_c$ , la dépendance est beaucoup plus faible et l'exposant vaut  $1/9$ . La courbe en trait plein est déduite de la raideur théorique  $\kappa_{th}$ . Les courbes en pointillés sont déduites de la raideur expérimentale  $\kappa_{exp}$  avec un préfacteur  $\lambda = 1.48$ .

déduites de la loi de raideur  $\kappa$ . Je rappelle que nous avons deux raideurs  $\kappa$  suivant que l'on prenne la raideur théorique  $\kappa_{th}$  (Eq. IV.4) ou la raideur expérimentale  $\kappa_{exp}$  (Eq. IV.5). Nous avons représenté les prédictions indirectes de la vitesse sur la Fig. IV.9. Les points expérimentaux obtenus pour  $F_0 > F_c$  sont en assez bon accord avec le modèle théorique : les valeurs numériques sont très proches, mais il faut toutefois noter que la prédiction théorique évolue encore moins vite avec  $F_0$  que ce que l'on trouve expérimentalement (où l'on mesure  $\beta \approx 1/9$ ). En revanche, aux faibles forces  $F_0$ , le modèle théorique est en désaccord avec nos mesures. Les vitesses réelles sont plus faibles que celles prévues et la dépendance avec  $F_0$  plus forte. De plus, on a tracé, la vitesse  $c_s^* = \lambda c_s$  déduite de la loi expérimentale  $\kappa_{exp}$  effectuée en statique. Pour se superposer aux mesures directes de vitesse, on doit multiplier la vitesse déduite par un préfacteur  $\lambda = 1.48$ . L'origine de ce préfacteur n'est pas clair. Par contre on observe que la relation expérimentale «  $F_0 - \delta$  » permet de retrouver les deux régimes avec les bonnes puissances pour la loi de vitesse même pour les faibles forces, contrairement à la



**FIG. IV.10** – (a) : Evolution de la vitesse  $c_s$  des ondes acoustiques avec la force de compression statique  $F_0$  dans une chaîne de grains de rayons  $R_1 = 6.5$  mm ( $\bullet$ ) et  $R_2 = 4.8$  mm ( $+$ ). La loi théorique prédit une différence de 2%. Expérimentalement, les points se superposent et on ne détecte pas de différence ; (b) : Evolution, en échelles log – log, de la vitesse des ondes avec  $F_0$  pour deux chaînes de grains de rugosités différentes : grains à l'état de surface brut ( $\bullet$ ) et grains polis ( $\times$ ).

loi théorique de l'équation III.17.

Des expériences ont également été menées pour voir un éventuel effet d'hystérésis lié à la plasticité des contacts. On effectue des mesures de vitesse en partant d'une grande force  $F_0$  et en la diminuant. Nous n'avons observé aucune différence pour les valeurs de vitesses. On a également fait la même série d'expériences pour les grains de rayons  $R_2 = 4.8$  mm. Les points expérimentaux pour les grains de rayons  $R_1$  et  $R_2$  sont tracés sur la Figure IV.10.a en échelles linéaires. La loi théorique prédit un écart qui n'excède pas les 2% ; expérimentalement, les points se superposent et on ne détecte pas de différences.

Nous avons aussi fait ces expériences avec les grains à l'état de surface poli. les résultats sont reportés sur la Figure IV.10.b. La courbe de vitesse présente le même aspect avec encore une transition à la force  $F_c$ . Aux petites forces, l'écart pour les deux types de grains n'est pas significatif compte tenu de l'imprécision sur la mesure de  $F_0$ . Pour  $F_0 > F_c$ , on mesure localement un exposant  $\beta \approx 1/11$  à la place de  $\beta \approx 1/9$ . On constate que pour les grains lisses, l'augmentation de la vitesse avec la force de confinement  $F_0$  est moins importante<sup>9</sup>. On se rapproche donc de la tendance donnée par le modèle théorique. Il est donc raisonnable de penser que la rugosité des surfaces joue un rôle pour  $F_0 > F_c$  : lorsque la rugosité diminue,

9. Cet exposant est similaire à celui mesuré par Daniels pour des grains en polyuréthane [113].



la loi de vitesse se rapproche du modèle théorique obtenu pour des surfaces parfaitement lisses. En revanche, il ne semble pas que la rugosité microscopique joue un rôle majeur aux faibles forces.

### IV.3 Essais sur d'autres types de grains

Nous avons souhaité faire des expériences analogues avec d'autres types de grains pour voir comment la loi de vitesse est affectée par ce changement. Je présente des expériences préliminaires faites sur une chaîne unidimensionnelle de cylindres en acier. Bien sûr, nous n'emploierons pas ici la photoélasticité. Dans un deuxième paragraphe, je présente les résultats relatifs à une chaîne de grains parallélipédiques (et photoélastiques) en contact.

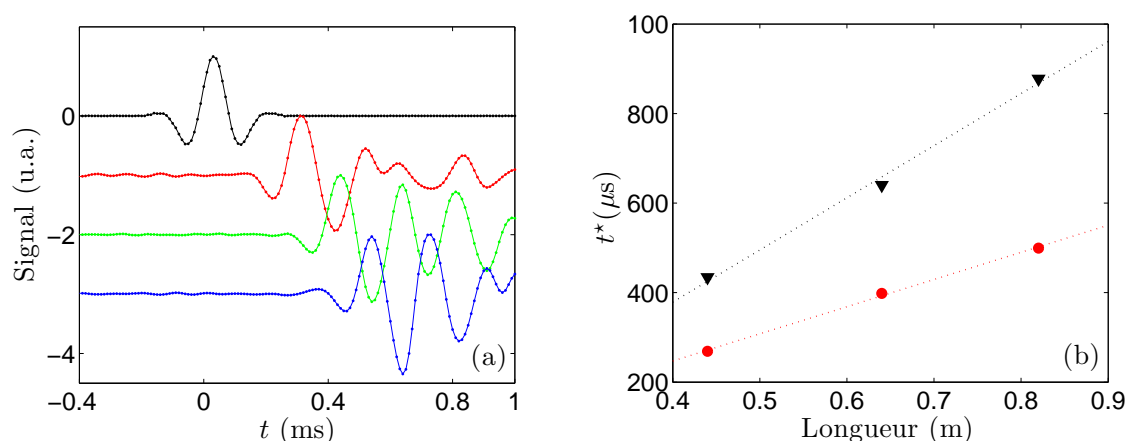
#### IV.3.1 Chaîne unidimensionnelle de cylindres en acier

Il s'agit d'expériences préliminaires réalisées avec Stéphane Job à Supméca Paris. La chaîne est constituée de cylindres en acier ( $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.30$ ,  $\rho = 7780 \text{ kg/m}^3$ ) de diamètre 2 cm et de largeur 2 cm. Ils sont comprimés par une force statique de confinement  $F_0$  variant entre 5 et 500 N. L'excitation est produite par un capteur piézoélectrique en contact avec le premier grain de la chaîne : le signal est une sinusoïde de fréquence 5 kHz modulée par une gaussienne. Le dernier grain est en contact avec un autre capteur piézoélectrique ce qui nous permet d'enregistrer le signal en bout de chaîne. La fréquence d'échantillonnage de ce capteur est de 100 kHz.

Pour estimer la vitesse des ondes, on réalise 3 chaînes de longueurs différentes constituées de 22, 32 et 41 cylindres. On cherche à déterminer le temps de vol entre les deux capteurs en fonction de la longueur de la chaîne. Pour chacune de ces chaînes, on réalise des expériences successives en faisant varier la force  $F_0$ . La Fig. IV.11.a montre les signaux enregistrés pour les trois chaînes de longueurs différentes chacune soumise à une force statique  $F_0 = 186 \text{ N}$ . On détermine ensuite le temps  $t^*$  qui correspond à l'arrivée en bout de chaîne du point à mi-hauteur<sup>10</sup> dans la première phase ascendante. Pour chaque force, on effectue cinq expériences pour moyenner les résultats. On a tracé sur la Fig. IV.11.b la valeur de  $t^*$  en fonction de la longueur de la chaîne pour deux forces statiques différentes. Les points s'alignent sur une

---

10. On a aussi déterminé le temps d'arrivée associé au point d'amplitude maximal. Les mesures de vitesse déduites sont identiques.

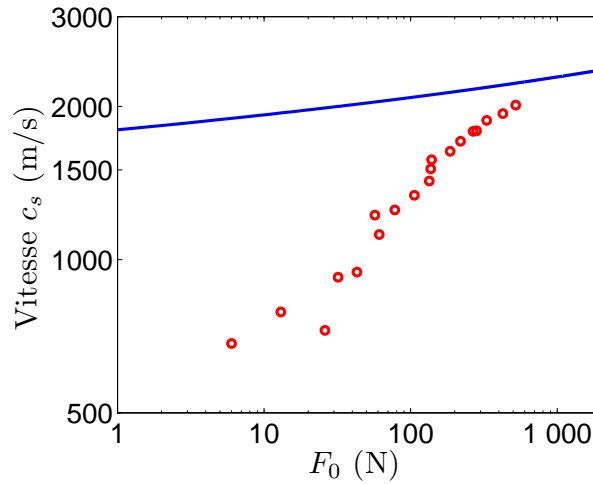


**FIG. IV.11** – (a) : Signaux enregistrés par la capteur piézoélectrique en bout de chaîne pour trois longueurs de chaîne différentes soumises à  $F_0 = 186$  N. La courbe du haut correspond au signal envoyé à l'émetteur. Les courbes ont été décalées verticalement pour une meilleure lisibilité. On observe le décalage temporel entre les trois courbes qui donne le temps de propagation. (b) : Mesure du temps de vol  $t^*$  du point à mi-hauteur en fonction de la longueur de chaîne pour une force statique  $F_0 = 186$  N (●) et  $F_0 = 43$  N (▼). On trouve respectivement  $c_s = 1632$  m/s et  $c_s = 945$  m/s.

droite dont la pente donne l'inverse de la vitesse  $c_s$ .

La Fig. IV.12 présente en échelles logarithmiques l'évolution de la vitesse  $c_s$  des ondes sonores dans une chaîne de cylindres en acier en fonction de  $F_0$ . On remarque que la vitesse augmente avec  $F_0$  mais elle reste inférieure à la prédiction théorique donnée par les Eqs. IV.3 et IV.4. On aboutit à la même observation que dans le cas des cylindres en polycarbonate. De plus, on constate qu'à une même force  $F_0$  les vitesses (aussi bien celles données par les points expérimentaux que par la courbe théorique) sont supérieures à celles obtenues pour les cylindres en polycarbonate. Cela traduit bien sûr que la vitesse de l'onde dépend de la taille des grains et du matériau les constituant.

Pour les grains en acier et pour la gamme de force accessible dans cette expérience, on ne retrouve pas le deuxième régime où la dépendance de  $c_s$  avec  $F_0$  est plus faible et se rapproche du modèle théorique. En supposant une loi de puissance du type  $c_s \propto F_0^\beta$  dans cette gamme de force, on trouve  $\beta \approx 0.28$ . On retrouve avec les cylindres en acier une puissance similaire à celle trouvée avec les cylindres en polycarbonate ( $\beta \approx 1/4$ ) pour le régime des faibles compressions. La vitesse est également inférieure à ce que prévoit le modèle.

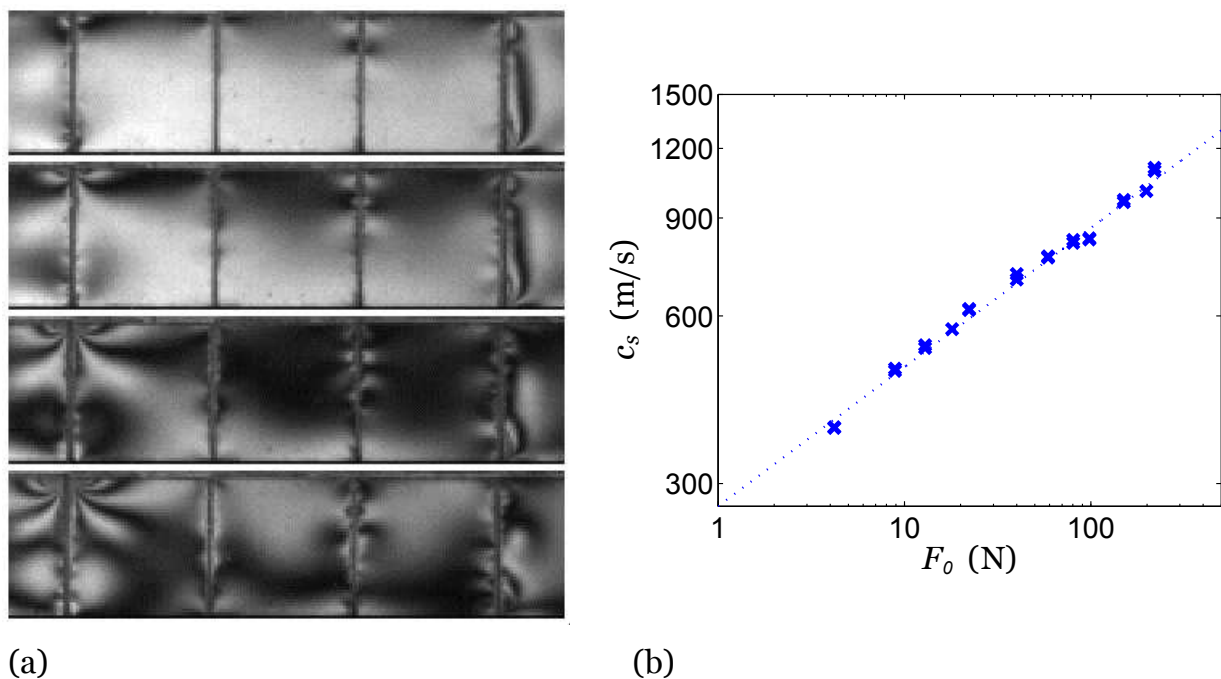


**FIG. IV.12** – Evolution, en échelles log – log, de la vitesse  $c_s$  des ondes sonores en régime linéaire en fonction de la force statique de confinement  $F_0$  pour une chaîne constituée de cylindres en acier. Le trait plein correspond à la prédiction théorique donnée par les Eqs. IV.3 et IV.4. Dans cette gamme de force, on trouve  $c_s \propto F_0^\beta$  avec  $\beta \approx 0.28$ .

### IV.3.2 Chaîne unidimensionnelle de parallélépipèdes

Nous avons également étudié la propagation d’ondes sonores en régime linéaire dans une chaîne unidimensionnelle de parallélépipèdes photoélastiques. Les grains sont placés côte à côte et se touchent par une de leurs faces. Pour des grains parallélépipédiques idéaux, la surface de contact est égale à la surface d’un côté et elle ne doit pas varier avec la force statique  $F_0$ . On s’attend donc à ce que la vitesse des ondes soit constante et égale à la vitesse des ondes longitudinales dans une barre du matériau constituant les grains.

Les grains sont découpés dans la plaque photoélastique en polycarbonate qui sert aussi à faire les cylindres. Ils font 13 mm de côté et 9.4 mm de largeur. On reprend le dispositif de la Fig. IV.1. Pour cette géométrie de grains et à cause d’effets thermiques lors de l’usinage, il apparaît des franges résiduelles, même à force nulle, que l’on a pas réussi à faire disparaître. La chaîne est mise sous compression avec des forces statiques allant jusqu’à  $F_0 = 220$  N. La Fig. IV.13.a montre quatre images photoélastiques de la chaîne soumise à  $F_0 = 10, 22, 45, 70$  N. Sur ces images, on constate qu’aux interfaces entre deux grains, il y a des zones de variations rapides de l’intensité lumineuse, ce qui signifie des variations rapides des contraintes au niveau des interfaces. On attribue cet effet à la rugosité des surfaces : les grains ne se touchent pas sur toute leur surface mais plutôt en un nombre limité de petites zones. Lorsque la chaîne est mise sous compression, les grains commencent à se toucher en



**FIG. IV.13** – Propagation d’ondes acoustiques dans une chaîne unidimensionnelle de parallélépipèdes. (a) : Images photoélastiques de la chaîne soumise à des forces statiques de confinement  $F_0 = 10, 22, 45, 70\text{N}$  (de haut en bas). A l’interface entre les grains, les endroits où l’intensité lumineuse varie rapidement correspondent aux points de contacts. On se rend compte que les grains se touchent en un petit nombre de points. (b) : Evolution, en échelles log – log, de la vitesse  $c_s$  des ondes acoustiques avec la force de confinement  $F_0$ . Dans cette gamme de force, on trouve  $c_s \propto F_0^\beta$  avec  $\beta \approx 0.25$ .

ces zones, les contraintes y sont grandes et les variations d’intensités importantes. Le nombre et la taille de ces zones augmentent lorsque  $F_0$  croît.

On a mesuré<sup>11</sup> la vitesse de propagation  $c_s$  des ondes sonores en régime linéaire en fonction de  $F_0$ . Les résultats sont reportés sur la figure IV.13.b. La vitesse augmente avec  $F_0$  passant de 360 m/s à 1200 m/s entre 4 et 220 N. Elle reste toujours inférieure à la vitesse du son dans le matériau *bulk*<sup>12</sup>. En supposant une loi de puissance du type  $c_s \propto F_0^\beta$ , on mesure un exposant  $\beta = 0.25$ .

Au § IV.5, nous ferons une synthèse des résultats obtenus portant sur la dépendance

11. Pour les grains parallélépipédiques, on ne peut pas utiliser la calibration du § III.5 pour déduire les forces à partir des images photoélastiques. A cause des franges résiduelles, on n’a pas pu trouver de méthode de calibration valable pour tous les grains. Pour mesurer la vitesse, on détermine le premier instant où l’intensité transmise par l’ensemble des pixels d’un grain varie.

12. Je rappelle que la vitesse du son dans le matériau est de l’ordre de 2000 m/s.

de la vitesse des ondes sonores avec la force de confinement statique  $F_0$  en régime linéaire pour différents chaînes unidimensionnelles. Avant cela, je présente des résultats relatifs à l'atténuation de l'onde au cours de la propagation dans la chaîne de cylindres en polycarbonate.

## IV.4 La dissipation

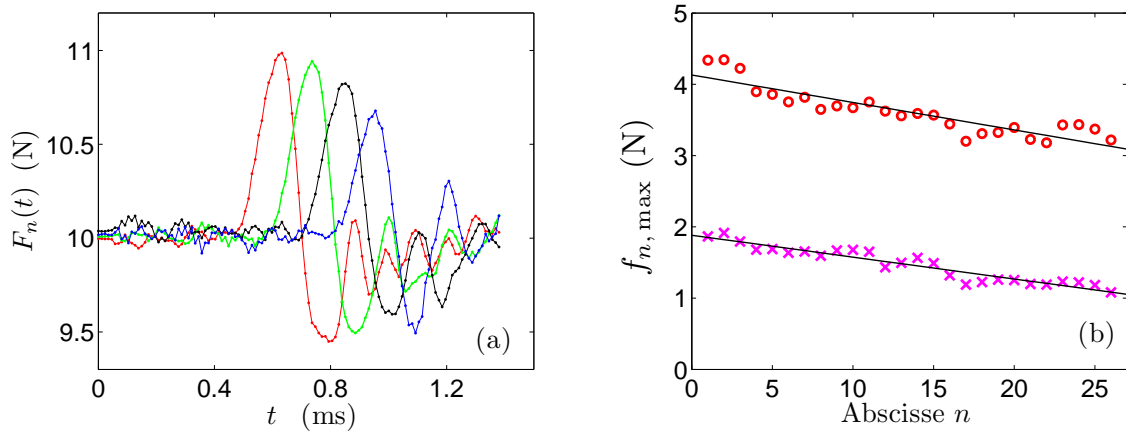
Lorsque nous avons modélisé une chaîne de grains par une association de masses et de ressorts (Eq. II.1), nous n'avons pas tenu compte d'éventuels effets dissipatifs. Ces effets ont une influence sur la propagation de l'onde, notamment sur sa forme [63, 65, 75]. De nouvelles études [118, 119, 120] incluent des effets dissipatifs dans l'équation régissant la dynamique de la chaîne. Plus généralement, il est important de connaître les causes de dissipation et les mécanismes physiques qui se produisent lors de la collision de deux grains élastiques [1, 121, 122, 123].

Nous nous focalisons ici sur le processus de dissipation qui accompagne la propagation de l'onde sonore en régime linéaire dans la chaîne de cylindres en polycarbonate. La figure IV.14.a montre en effet que l'amplitude du pulse, noté  $f_{n,\max}$ , diminue lors de la propagation dans la chaîne de grains. On cherche à déterminer l'influence de la force de confinement  $F_0$ , de la force verticale  $F_\perp$ , et de l'amplitude initiale du pulse  $f_{1,\max}$  sur la dissipation. Pour pouvoir faire varier  $F_\perp$ , nous utilisons la méthode 2 : on ajoute des masses calibrées sur la pièce en aluminium (voir description § III.3.1.). Je précise que nous n'avons pas constaté d'influence de  $F_\perp$  sur la vitesse  $c_s$  des ondes.

Afin de gagner en précision sur la mesure de la valeur de  $f_{n,\max}$ , on utilise la méthode de l'approximation parabolique dont on a déjà parlé (Fig. IV.7.a). On a tracé sur la figure IV.14.b le maximum de l'amplitude  $f_{n,\max}$  en fonction de  $n$  pour deux valeurs différentes de l'amplitude  $f_{1,\max}$ . On peut légitimement dire que la décroissance de l'amplitude suit une loi linéaire dont la pente  $\alpha$  ne semble pas dépendre de  $f_{1,\max}$ . Cela se traduit par :

$$f_{n,\max} = -\alpha_{(F_0, F_\perp)}(n - 1) + f_{1,\max} \quad (\text{IV.8})$$

Physiquement,  $\alpha$  correspond à la force perdue lorsque l'onde parcourt une distance égale au diamètre d'un grain. A priori  $\alpha$  peut dépendre de  $F_0$  et de  $F_\perp$ . A partir de l'équation IV.8, on peut définir une disande d'atténuation  $L_a$  qui correspond à la distance de propagation



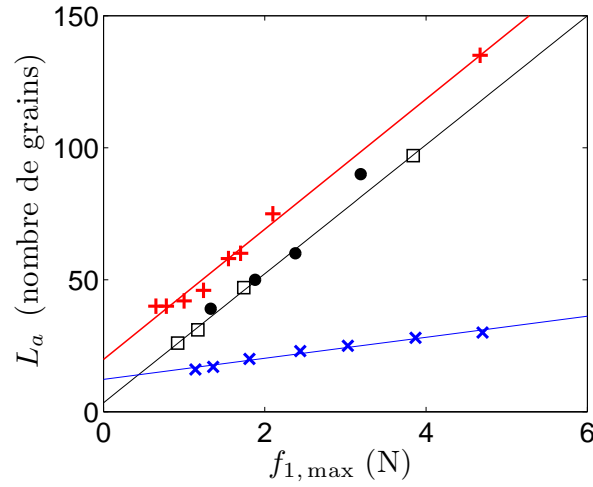
**FIG. IV.14** – (a) : Profil de la force  $F_n(t)$  pour les grains  $n = 8, 13, 18, 23$ . On voit que l’amplitude maximale du pulse  $f_{n,\max}$  diminue au cours de la propagation. (b) : Mesure de  $f_{n,\max}$  en fonction de  $n$  pour deux amplitudes du pulse différentes :  $f_{1,\max} = 4.1 \text{ N}$  ( $\circ$ ) et  $f_{1,\max} = 1.9 \text{ N}$  ( $\times$ ). Dans les deux cas  $F_0 = 8 \text{ N}$  et  $F_\perp = 0.15 \text{ N/grain}$ .

(exprimée en diamètre de grains) au bout de laquelle l’amplitude de l’onde vaut zéro. Par définition :

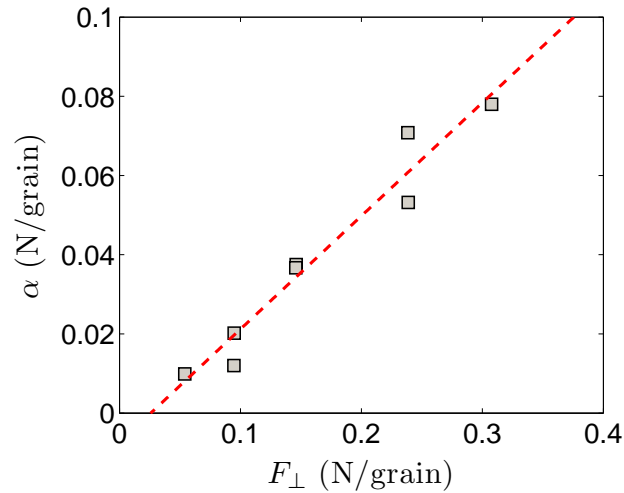
$$L_a = \frac{f_{1,\max}}{\alpha(F_0, F_\perp)} \quad (\text{IV.9})$$

Nous avons étudié comment  $L_a$  dépend de  $F_0$  et de  $F_\perp$ . Les résultats sont présentés sur la figure IV.15 où l’on trace  $L_a$  en fonction de  $f_{1,\max}$  pour différentes valeurs de  $F_0$  et de  $F_\perp$ . Notons tout d’abord que la distance d’atténuation  $L_a$  varie d’une dizaine de grains dans les conditions les plus défavorables à plus de 150 grains, soit deux aller-retours dans la chaîne, dans le cas le plus propice. Dans notre système, l’onde peut se propager sur d’assez grandes distances, ce qui ne serait pas le cas avec des grains en polyuréthane [113]. On voit ici l’intérêt d’utiliser ces grains.

Pour tous les paramètres essayés, on voit que  $L_a$  varie linéairement avec  $f_{1,\max}$  comme prévu par l’équation IV.9. On remarque que les points obtenus dans deux configurations où la force  $F_\perp$  est la même ( $F_\perp = 0.15 \text{ N/grain}$ ) mais pour deux forces statiques différentes ( $F_0 = 8 \text{ N}$  ( $\square$ ) et  $F_0 = 14 \text{ N}$  ( $\bullet$ )) s’alignent sur la même droite. Cela suggère que la dissipation est assez peu affectée par la force de confinement statique  $F_0$ . En revanche, pour une même force  $F_0$  ( $F_0 = 26 \text{ N}$ ), la longueur d’atténuation est considérablement réduite lorsque  $F_\perp$  augmente ( $F_\perp = 0.22 \text{ N/grain}$  ( $+$ ) et  $F_\perp = 0.49 \text{ N/grain}$  ( $\times$ )). On en déduit donc que  $\alpha$  ne dépend significativement que de  $F_\perp$ . On trace alors  $\alpha$  en fonction de  $F_\perp$  sur la figure IV.16.



**FIG. IV.15** – Evolution de la distance d'atténuation  $L_a$  de l'onde avec l'amplitude initiale du pulse  $f_{1,\max}$ . ( $\square$ ) :  $F_\perp = 0.15$  N/grain et  $F_0 = 8$  N; ( $\bullet$ ) :  $F_\perp = 0.15$  N/grain et  $F_0 = 14$  N; ( $+$ ) :  $F_0 = 26$  N et  $F_\perp = 0.22$  N/grain; ( $\times$ ) :  $F_0 = 26$  N et  $F_\perp = 0.49$  N/grain. On voit sur ce graphe que  $L_a$  ne dépend pas de  $F_0$  mais uniquement de  $F_\perp$ .



**FIG. IV.16** – Evolution de  $\alpha$  avec la force verticale de serrage  $F_\perp$ . La droite en pointillés est une régression linéaire du type  $\alpha = \mu F_\perp$ . On trouve  $\mu = 0.28$ .

On voit que  $\alpha$  dépend linéairement de  $F_{\perp}$ , ce que nous écrivons :

$$\alpha = \mu F_{\perp} \quad (\text{IV.10})$$

Une régression linéaire donne  $\mu = 0.28$ .

L'équation IV.10 est analogue à la loi de Coulomb pour le frottement solide : la force de frottement tangentielle est proportionnelle à la force normale  $F_{\perp}$ . D'autre part, on a mesuré le coefficient de frottement d'un grain sur la pièce en dural utilisée pour serrer les grains. Pour cela, on incline ladite pièce en partant d'un angle nul avec l'horizontale et on relève la valeur de l'angle pour laquelle le grain se met à glisser. On trouve environ 15 degrés, ce qui donne un coefficient de frottement de 0.26. Cette valeur est très proche de celle que nous avons mesuré pour le paramètre  $\mu$ .

On en déduit que la cause principale de dissipation lors de la propagation du pulse est le frottement solide. Ce frottement a lieu entre les grains et les deux pièces métalliques horizontales qui servent de support et par lesquelles on empêche la chaîne de flamber.

## IV.5 Résumé des résultats obtenus

Dans cette dernière partie, je récapitule et discute les différents résultats que nous avons obtenus relatifs à la propagation des ondes sonores en régime linéaire dans une chaîne 1D.

On a d'abord étudié la dépendance de la vitesse  $c_s$  des ondes avec la force statique de confinement  $F_0$  pour une chaîne de cylindres en polycarbonate (Fig. IV.9). Du fait de la non-linéarité de la loi de contact, la vitesse augmente avec  $F_0$  et est inférieure à la vitesse du son dans le matériau *bulk*. On a constaté deux régimes différents pour la loi de vitesse. Pour des forces supérieures à  $F_0 > F_c \approx 20 \text{ N}$ , les mesures de vitesse sont en assez bon accord avec le modèle théorique (Eqs. IV.3 et IV.4), si ce n'est que la courbe théorique augmente même un petit peu plus lentement avec  $F_0$  que les points expérimentaux. Pour  $F_0 < F_c$ , les mesures de vitesse sont nettement inférieures à la prédiction théorique, ce qui signifie que la raideur  $\kappa$  du contact est inférieure à celle attendue. La force à laquelle se produit la transition, soit  $F_c$ , est identique à celle où a lieu la transition pour les courbes «  $F_0 - S$  » et «  $F_0 - \delta$  » (§ III.3). On peut en déduire que c'est l'imperfection de la forme des grains (la



rugosité *macroscopique* et *microscopique*) qui est responsable du comportement aux faibles forces. Dans cette gamme de force, puisque la surface de contact est plus petite que celle attendue pour des cylindres parfaits (Fig. III.12), la raideur du contact est plus petite ce qui justifie que la vitesse  $c_s$  est inférieure aux prédictions. En supposant une loi de puissance dans ces deux régimes du type  $c_s \propto F_0^\beta$ , on mesure :

$$c_s \propto F_0^\beta \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \beta \approx 1/4 & \text{pour } F_0 < F_c \approx 20\text{N} \\ \beta \approx 1/9 & \text{pour } F_0 > F_c \end{cases} \quad (\text{IV.11})$$

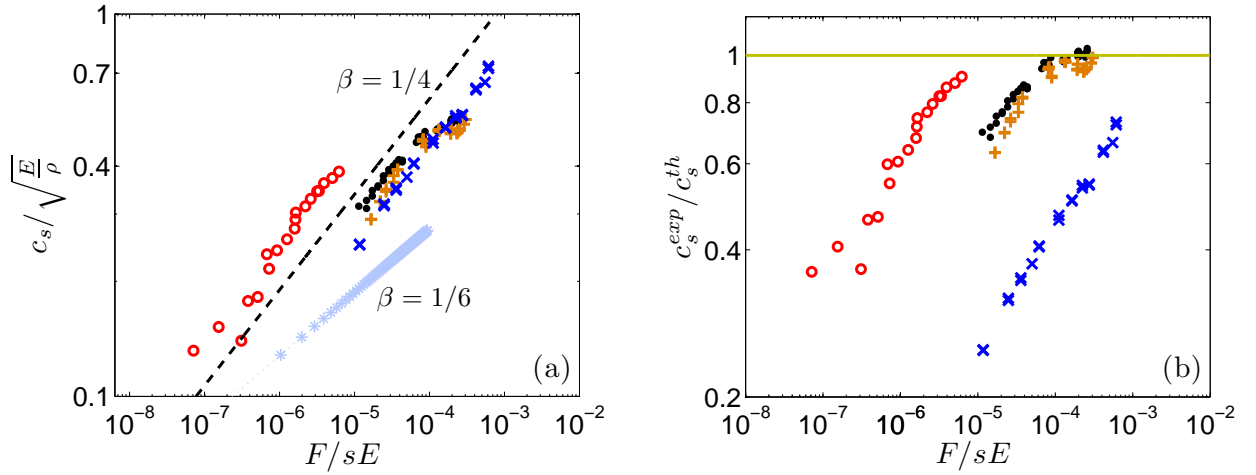
Ces deux lois de puissance sont cohérentes avec ce que l'on déduit de la loi de contact «  $F_0 - \delta$  » mesurée expérimentalement (Fig. III.14). Effectivement à partir de cette mesure, on en déduit la raideur  $\kappa$  (Eq. IV.5) et en prenant la racine carrée  $c_s \propto \sqrt{\kappa}$ , on trouve des puissances de 0.22 et 0.13 proches de 1/4 et 1/9.

Pour les grains à l'état de surface poli (Fig. IV.10.b), le même comportement est observé mais la pente aux grandes forces est plus faible :  $\beta \approx 1/11$ . On se rapproche donc davantage de l'allure de la courbe théorique obtenu pour des cylindres parfaitement lisses.

Nous avons également fait des mesures pour une chaîne 1D de cylindres en acier (Fig. IV.12). Dans la gamme de force explorée, on observe que la vitesse est inférieure à celle attendue mais tend à la rattrapper aux alentours de  $F_0 \propto 1000\text{N}$ . On mesure  $\beta \approx 0.28$  ce qui n'est pas très loin de 1/4. Nous avons également fait des expériences sur une chaîne 1D de parallélépipèdes (Fig. IV.13). Pour ceux-ci, on pourrait s'attendre à ce que la surface de contact n'augmente pas avec  $F_0$  et que la vitesse soit alors constante. Il n'en est rien et on mesure également un exposant  $\beta \approx 1/4$ .

Pour faire figurer tous les résultats expérimentaux sur une même figure, on trace la vitesse normalisée  $c_s/\sqrt{E/\rho}$  en fonction du nombre sans dimension  $\epsilon = F/(sE)$  où  $s$  correspond à la surface définie par l'intersection du grain et d'un plan qui passe par le centre du grain et perpendiculaire à la direction de propagation<sup>13</sup>. Les résultats sont représentés en échelles logarithmiques sur la Fig. IV.17.a. On a aussi fait figurer le fit des données expérimentales (tiré des mesures de Coste et Gilles [58]) concernant la propagation d'ondes acoustiques en régime linéaire dans une chaîne de sphères en acier. Cette droite correspond à une puissance  $\beta = 1/6$ . Il est intéressant et instructif de noter que dans ce jeu de variables les résultats pour

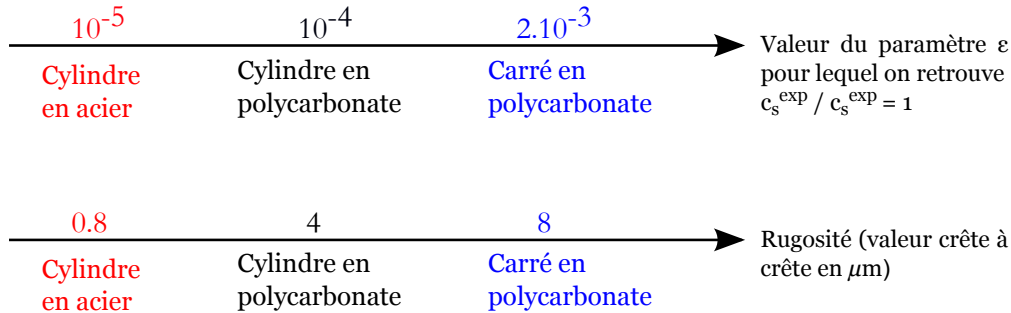
13.  $s$  ne doit pas être confondu ici avec la surface de contact  $S$ . Pour des sphères  $s = \pi R^2$ , pour des cylindres  $s = 2RL$  et pour les parallélépipèdes,  $s$  est la section de la face où a lieu le contact.



**FIG. IV.17** – (a) : Vitesse adimensionnée  $c_s/\sqrt{E/\rho}$  en fonction du paramètre sans dimension  $\epsilon = F/sE$ . Ce jeu de variables permet de représenter sur un même graphique tous les résultats obtenus dans ce chapitre. ( $\bullet$ ) : cylindres en polycarbonate de diamètre  $d_1 = 13$  mm ; ( $+$ ) : cylindres en polycarbonate de diamètre  $d_2 = 9.6$  mm ; ( $\circ$ ) : cylindres en acier ; ( $\times$ ) : parallélépipèdes en polycarbonate. Pour comparaison, on a fait figurer l’ajustement des données expérimentales ( $*$ ) concernant une chaîne de sphères en acier et trouvé dans [58]. (b) : Rapport  $c_s^{exp}/c_s^{th}$  des vitesses expérimentales et théoriques pour les différents types de grains testés dans ce chapitre en fonction de  $\epsilon$ . L’ordre suivant lequel les données expérimentales rattrapent la droite de valeur constante et égale à 1 reflète l’influence relative de la rugosité sur le contact entre les grains. Dans ce cas, la rugosité est la plus importante pour les parallélépipèdes, puis les cylindres en polycarbonate et enfin les cylindres en acier.

les différentes géométries et différents matériaux de grains prennent des valeurs similaires. De plus, on constate clairement que les valeurs obtenus pour tous les grains non-sphériques suivent, pour les petites valeurs de  $\epsilon = F/sE$ , une puissance  $\beta \approx 1/4$ . Dans les gammes de forces explorées, seuls les deux types de cylindres en polycarbonates atteignent le comportement attendu du modèle théorique. Cela se produit vers  $\epsilon \approx 10^{-4}$ . On peut s’interroger sur le fait de trouver une puissance 1/4 pour ces différentes géométries de grains (cylindres et parallélépipèdes), tout comme on mesure une puissance 1/4 aux faibles forces pour les empilements 2D et 3D (§ II.2). Il est intrigant d’observer que pour tous les empilements étudiés expérimentalement, l’écart aux prédictions théoriques qui a lieu aux « faibles forces » mettent en avant un exposant 1/4, aussi bien pour les empilements 2D et 3D de sphères que pour des chaînes 1D de grains cylindriques et même parallélépipédiques.

On a aussi tracé le rapport entre les vitesses obtenues expérimentalement<sup>14</sup> et celles attendues théoriquement<sup>15</sup>, soit  $c_s^{exp}/c_s^{th}$ , en fonction de  $\epsilon = F/sE$ . Dans le cas de grains parfaits sans aucun défaut, les deux valeurs  $c_s^{exp}$  et  $c_s^{th}$  sont égales et on devrait trouver 1 pour tous les  $\epsilon$ . La figure IV.17.b montre ce qu'on trouve expérimentalement pour des grains réels. Pour les valeurs du paramètre  $\epsilon$  explorées expérimentalement, seuls les cylindres en polycarbonate atteignent la valeur 1 autour de  $\epsilon \approx 10^{-4}$ . Pour les petites valeurs de  $\epsilon$ , on a vu que c'est la rugosité due à l'usinage des cylindres qui est responsable de l'écart avec le modèle. On peut prolonger cette explication pour les autres grains en acier et les parallélépipèdes. La valeur du paramètre  $\epsilon$  à laquelle on rattrape la droite  $c_s^{exp}/c_s^{th} = 1$  donne alors une idée de l'importance de la rugosité des surfaces. Dans notre cas, on voit que l'ordre des grains pour lesquels la rugosité a une influence de plus en plus importante sur le contact est : les cylindres en acier, puis les cylindres en polycarbonate et enfin les parallélépipèdes. Cet ordre est confirmé par les mesures au profilomètre : les valeurs crête-à-crête valent en moyenne respectivement  $0.8 \mu\text{m}$ ,  $4 \mu\text{m}$  et  $8 \mu\text{m}$ .



**FIG. IV.18** – Corrélation entre la rugosité des surfaces et la valeur du paramètre  $\epsilon$  à partir duquel la vitesse expérimentale est égale à celle donnée par le modèle théorique, qui suppose des surfaces parfaites.

Pour les parallélépipèdes et d'après la loi de Hooke, le paramètre  $\epsilon$  correspond exactement à la déformation  $\epsilon = F/sE = \Delta l/l$  où  $l$  est la longueur du parallélépipède et  $\Delta l$  l'écrasement. D'après le graphe IV.17.b et en extrapolant les points expérimentaux, on trouve le comportement attendu pour des grains idéaux au-delà de  $\epsilon \approx 2.10^{-3}$ . Avant cela, les grains se touchent juste par les rugosités, ce qui nous permet d'assimiler  $\Delta l$  à l'estimation de la hauteur des rugosités ; on a :

14. Pour les différencier, je note maintenant  $c_s^{exp}$  les mesures expérimentales.

15. Je précise que, naturellement, les vitesses attendues en théorie sont calculés avec des équations différentes pour les différents types de grains.

$$\Delta l \approx 2.10^{-3}l \approx 25 \mu\text{m} \quad (\text{IV.12})$$

Cette valeur estimée à partir du graphique est cohérente avec la mesure obtenue au profilomètre.

On a donc montré l'influence de la rugosité des grains sur la propagation des ondes sonores en régime linéaire pour différents types de grains. Aux faibles valeurs de  $\epsilon$ , on a mis en évidence un exposant  $1/4$  entre la vitesse  $c_s$  et la force  $F_0$  quelque soit la géométrie et la nature des grains. La valeur de  $\epsilon$  où l'on rattrappe le comportement théorique semble être contrôlé par la rugosité.

Après l'étude de l'évolution de la vitesse  $c_s$  avec la force statique  $F_0$ , on s'est intéressé à l'atténuation du pulse dans la chaîne de cylindres au cours de la propagation. On a montré que la cause principale de dissipation était le frottement solide qui a lieu entre les grains et la structure métallique sur laquelle ils reposent.

Dans le prochain chapitre, on utilise encore la chaîne 1D mais pour étudier cette fois-ci la propagation des ondes de grande amplitude en régime non-linéaire. Ce régime correspond au cas où l'amplitude de l'onde est grande (voire très grande) comparée à la force de confinement statique. On cherchera notamment à mesurer la vitesse de ces ondes en fonction de leur amplitude.



# Chapitre V

## Ondes sonores en régime non-linéaire dans une chaîne unidimensionnelle de cylindres

### Sommaire

---

<b>V.1 Ondes de moyenne amplitude . . . . .</b>	<b>116</b>
<b>V.2 Ondes de grandes amplitudes . . . . .</b>	<b>119</b>
V.2.1 Dispositif . . . . .	119
V.2.2 Exemple et visualisation de l'onde produite . . . . .	120
<b>V.3 Traitement d'images . . . . .</b>	<b>122</b>
V.3.1 Mesure de l'amplitude $F_m$ de l'onde . . . . .	122
V.3.2 Suivi du profil de l'onde . . . . .	125
<b>V.4 Résultats . . . . .</b>	<b>127</b>
V.4.1 Profil de l'excitation . . . . .	127
V.4.2 Vitesse des ondes en régime non-linéaire . . . . .	131
V.4.3 Détermination de la vitesse $V$ des ondes solitaires pour une loi de puissance du type $F = A_\alpha \delta^\alpha$ . . . . .	133
<b>V.5 Conclusion . . . . .</b>	<b>136</b>

---

Au chapitre IV, nous nous sommes intéressés à la propagation d'ondes sonores dans une chaîne de cylindres en régime linéaire. Cela signifie que l'amplitude<sup>1</sup> de l'onde  $F_m$  est très petite par rapport à la force statique de confinement  $F_0$ . Nous allons, dans ce chapitre, étudier la propagation d'ondes en régime non-linéaire. Ce régime correspond au cas où l'amplitude de l'onde  $F_m$  est grande voire très grande comparée à la force statique  $F_0$ . Nous chercherons à voir comment se transposent les résultats de la théorie de Nesterenko [53] dans le cas de grains cylindriques dont la loi de contact  $\ll F_0 - \delta \gg$  déterminée expérimentalement présente deux lois de puissance.

Je présente deux méthodes pour générer des ondes non-linéaires. Tout d'abord, en utilisant le même dispositif qu'au chapitre IV, on obtient des ondes de moyenne amplitude  $F_m \approx F_0$ . Pour produire des ondes de très grandes amplitudes  $F_m \gg F_0$ , on utilise l'impact d'une bille de verre sur la chaîne. La propagation de l'onde sera suivie par photoélasticité avec la caméra rapide. On s'intéresse à l'évolution de la vitesse des ondes avec leur amplitude  $F_m$  ainsi qu'au profil des ondes générées dans la chaîne.

## V.1 Ondes de moyenne amplitude

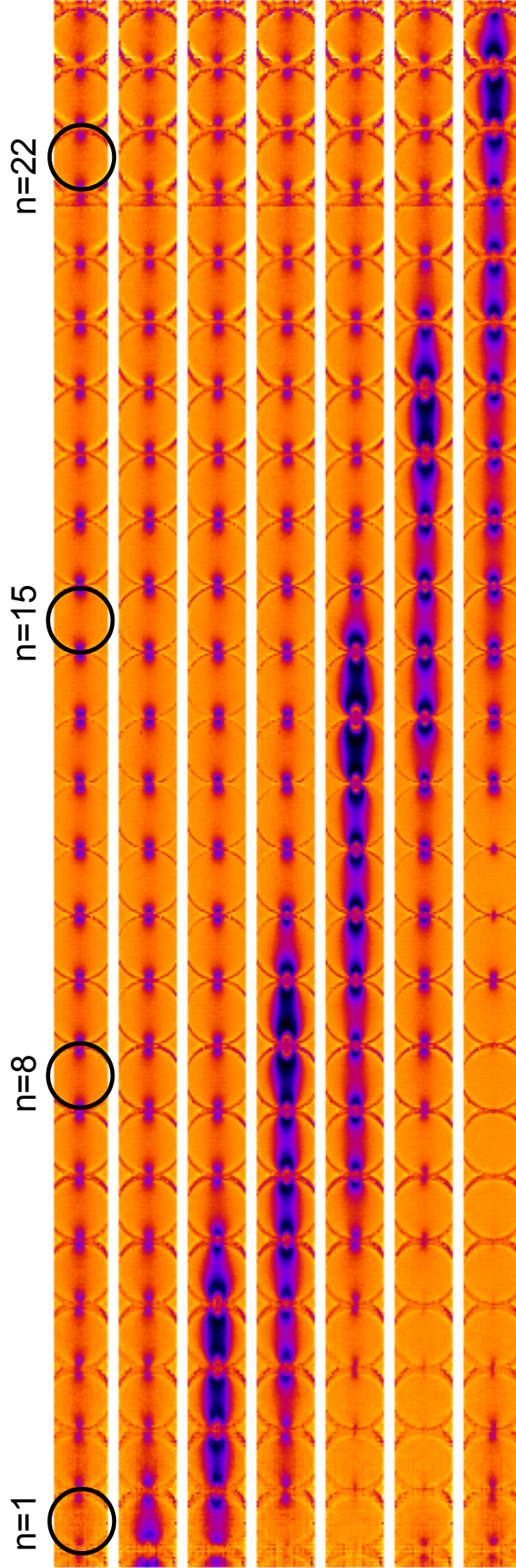
La première méthode pour produire des ondes non-linéaires est de réutiliser le dispositif du chapitre IV : une tige métallique collée à un haut-parleur impacte le premier grain de la chaîne et génère ainsi une déformation qui se propage. Pour augmenter l'amplitude du choc par rapport aux expériences du Chapitre IV, nous sommes obligés d'augmenter le temps d'impact. La chaîne est filmée à partir du troisième grain à une fréquence de 86956 images/s.

Une séquence d'images illustrant la propagation de l'onde est présentée Fig. V.1 pour une force de confinement de  $F_0 = 5 \text{ N}$ . On voit ici que le passage de l'onde provoque une forte variation de l'intensité lumineuse transmise par les grains ; l'effet de l'onde sur l'intensité est même supérieur à celui de la force statique  $F_0$ . Cela traduit que l'amplitude de l'onde est plus grande que la force statique. Toutefois, dans cet exemple, la force maximale atteinte ne permet pas de dépasser la première frange noire : on reste toujours au même ordre  $p = 0$ .

---

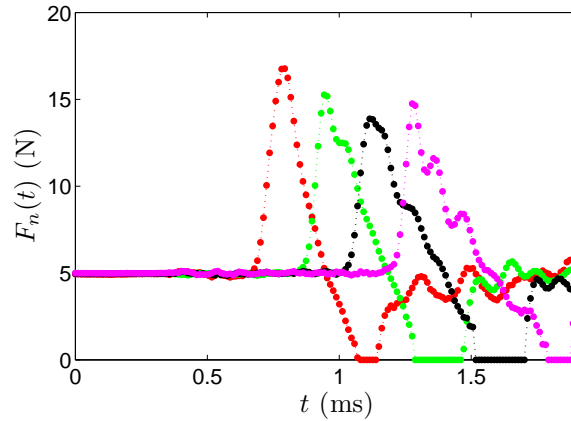
1. Par commodité, nous écrirons maintenant  $F_m$  pour l'amplitude maximale de l'onde et non plus  $f_{n,\max}$  comme au chapitre IV.

---



**FIG. V.1** – Visualisation de la propagation de l'onde de moyenne amplitude dans la chaîne 1D. L'onde est produite avec le même dispositif qu'au chap. IV. Le grain noté  $n = 1$  est en fait le troisième grain de la chaîne. Les paramètres de l'expérience sont  $F_0 = 5\text{ N}$  et  $F_m = 12\text{ N}$ . L'intervalle de temps entre les images est  $115\text{ }\mu\text{s}$ . La première image correspond à la chaîne dans son état initial soumise à la précontrainte statique. Remarquons que sur la dernière image, le grain  $n = 8$  n'est plus soumis à aucune force, soit  $F_{n=8} = 0$ .





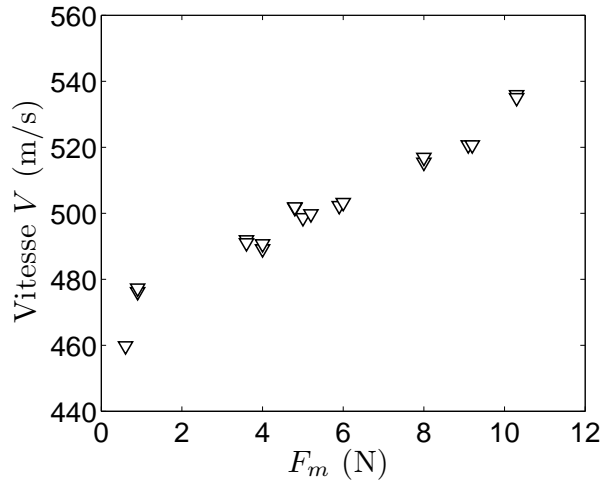
**FIG. V.2** – Allure des courbes  $F_n(t)$  pour les grains  $n = 1, 8, 15, 22$  (de gauche à droite). Ces courbes sont obtenues après le traitement des images de la Fig. V.1. Après la phase de compression, la force  $F_n(t)$  diminue, devient inférieure à  $F_0$  et s’annule même momentanément avant de retrouver sa valeur initiale. De plus, on constate que le pulse initial a tendance à se scinder en plusieurs pulses d’amplitudes décroissantes. Cela est particulièrement visible pour le grain  $n = 22$ .

Le traitement d’images consiste encore à mesurer l’intensité  $I_n(t)$  au centre de chaque grain  $n$ , puis de calculer  $\zeta$  et enfin  $F_n(t)$  (Eqs. III.30 et III.34). Sur la Fig. V.2, on trace l’allure de  $F_n(t)$  pour les grains  $n = 1, 8, 15, 22$  correspondant à la séquence d’images précédentes. Avant que l’onde n’arrive, tous les grains sont soumis à la force statique  $F_0 = 5$  N, puis pour chaque grain  $n$  la force  $F_n(t)$  augmente et atteint une valeur maximale d’environ  $F_{\max} \approx 15$  N. Dans toute la suite, on notera  $F_{\max}$  la valeur maximale de l’onde ; il s’agit de la somme de la force statique  $F_0$  et de l’amplitude de l’onde  $F_m$ . Ensuite, la force diminue et devient inférieure à  $F_0$  ; cela signifie que le grain est momentanément moins comprimé qu’il ne l’est à l’état initial. On constate même que la force  $F_n(t)$  s’annule ce qui correspond à un grain qui n’est plus soumis à aucune force de la part de ses voisins. Cela est directement visible sur la dernière image de la figure V.1 pour le grain  $n = 8$  : il n’y a plus aucune frange sur le grain. Cet état est temporaire et tous les grains retrouvent ensuite la force statique initiale  $F_0$ .

On remarque qu’au cours de la propagation, le pulse initial a tendance à se décomposer en une succession de pulses plus fins et d’amplitudes décroissantes. Nous avons déjà mentionné ce phénomène au chapitre II pour des solitons créées dans une chaîne de sphères grâce à l’impact d’une bille plus massive que celles constituant la chaîne. Néanmoins, Shukla [70] a lui aussi remarqué cette décomposition de l’onde lorsqu’il augmente la largeur temporelle de l’excitation initiale. Dans notre cas, il s’agit du même processus car nous avons été obligé

d'augmenter le temps d'impact du haut-parleur par rapport aux expériences en régime linéaire pour augmenter l'amplitude de l'onde.

Nous avons estimé la vitesse de propagation de cette onde de moyenne amplitude par la méthode du temps de vol en suivant le point à mi-hauteur du front ascendant. On a tracé figure V.3 l'évolution de la vitesse  $V$  des ondes en régime non-linéaire en fonction de leur amplitude  $F_m$  (l'amplitude  $F_m$  est déterminée pour le grain  $n = 1$ ). On remarque que la vitesse  $V$  augmente lorsque l'amplitude de l'onde  $F_m$  augmente. En extrapolant les points expérimentaux lorsque  $F_m \rightarrow 0$ , on trouve  $V \approx 450$  m/s. On retrouve bien la vitesse  $c_s$  des ondes sonores en régime linéaire ( $F_m \rightarrow 0$ ) évaluée à  $F_0 = 5$  N.



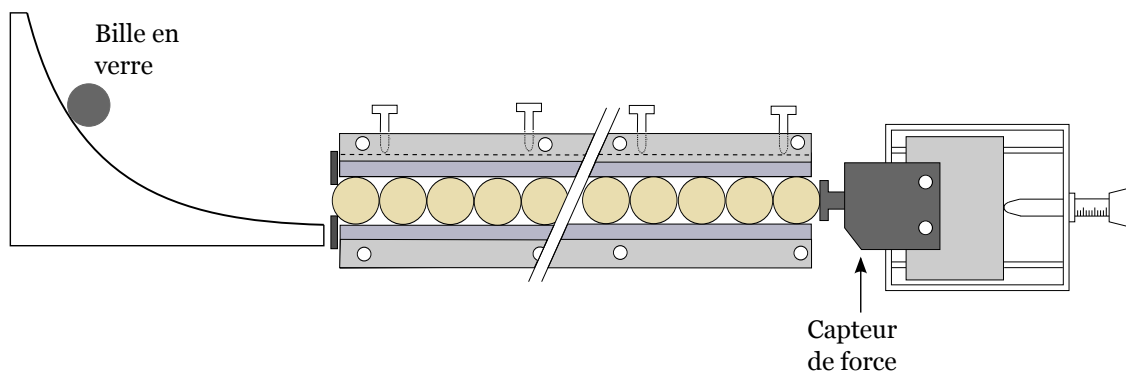
**FIG. V.3** – Evolution de la vitesse  $V$  des ondes de moyenne amplitude en fonction de leur amplitude  $F_m$ . La force statique de confinement vaut  $F_0 = 5$  N.

A l'aide de ce dispositif, les amplitudes maximales  $F_m$  que l'on peut atteindre sont de l'ordre d'une dizaine de newtons. Cela n'est pas suffisant pour tester le régime  $F_m \gg F_0$ . Dans le prochain paragraphe, je présente le dispositif utilisé pour obtenir des ondes de très grandes amplitudes de plusieurs dizaines de newtons.

## V.2 Ondes de grandes amplitudes

### V.2.1 Dispositif

Pour générer des ondes de grandes amplitudes telles que  $F_m \gg F_0$ , on crée un impact entre le premier grain de la chaîne et une bille en verre de masse 5 g. La bille est lâchée



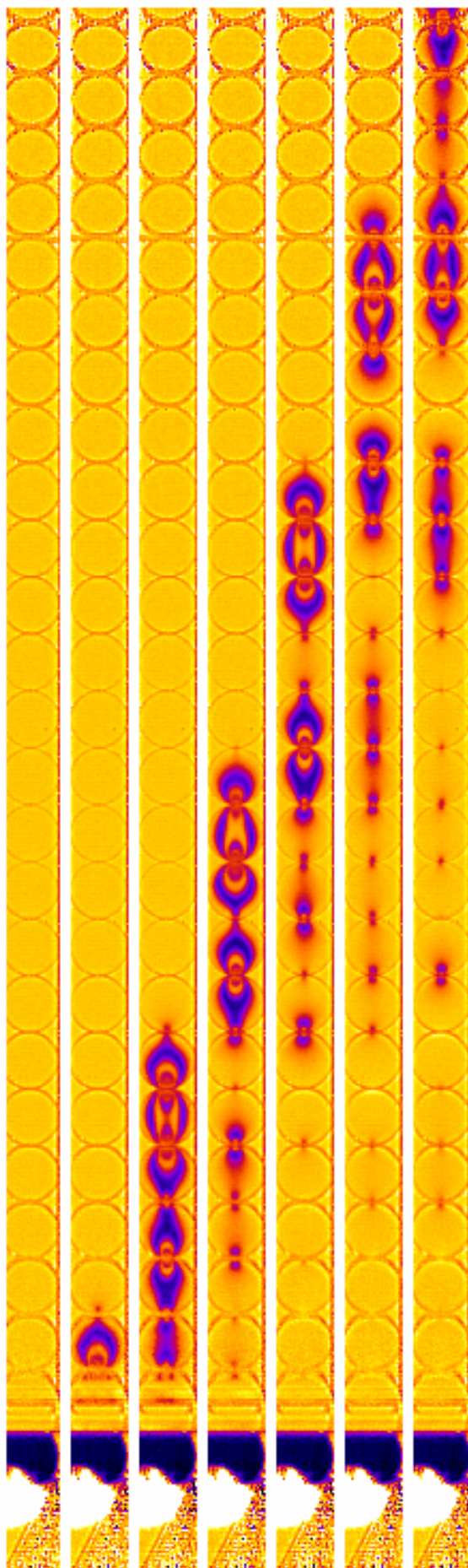
**FIG. V.4** – *Dispositif expérimental permettant de générer des ondes de grandes amplitudes. Une bille de verre de masse 5 g est lâchée sur un toboggan et vient impacter le premier grain de la chaîne. Cet impact crée une onde de déformation. Ce dispositif permet d'atteindre des ondes d'amplitude allant jusqu'à 100 N.*

sur un toboggan afin d'acquérir une certaine vitesse et impacte le premier grain de la chaîne (Fig. V.4). Il suffit de lâcher la bille d'une hauteur différente sur le toboggan pour faire varier l'amplitude de l'onde produite par le choc. Le reste du dispositif est le même que celui du chapitre IV. Les paramètres d'acquisition de la caméra sont les suivants : 86956 images/s et une résolution de  $736 \times 32$  pixels.

### V.2.2 Exemple et visualisation de l'onde produite

La figure V.5 montre la propagation de l'onde créée par l'impact de la bille de verre sur la chaîne 1D. La force statique de confinement vaut  $F_0 = 1$  N. Les images sont séparées de  $115 \mu\text{s}$ . On constate que le pulse initial se décompose assez rapidement en plusieurs pulses bien séparés. Par conséquent, la force est quasiment nulle entre deux pulses. De plus, ceux-ci sont fins : ils ont une taille typique de 2 – 3 grains. On reviendra sur la forme de l'onde produite au § V.4.1.

A la vue de la décomposition de l'onde, on décide de mesurer la vitesse  $V$  du premier pulse. Il nous faut pour cela trouver une façon de suivre la propagation de ce pulse, de mesurer sa vitesse et d'estimer son amplitude  $F_m$ . C'est l'objet du prochain paragraphe.



**FIG. V.5** – Propagation d'une onde de grande amplitude dans une chaîne unidimensionnelle de cylindres. L'onde est produite par l'impact d'une bille de verre sur le premier grain de la chaîne. Le temps entre deux images est  $115 \mu\text{s}$ . La chaîne est soumise à une force statique de confinement de  $F_0 = 1 \text{ N}$  et l'amplitude de l'onde vaut  $F_m = 52 \text{ N}$ .

## V.3 Traitement d'images

### V.3.1 Mesure de l'amplitude $F_m$ de l'onde

On souhaite estimer l'amplitude maximale<sup>2</sup>  $F_m$  du premier pulse qui se propage dans la chaîne. En pratique, on a accès à  $F_{\max}$  auquel on soustrait  $F_0$  pour obtenir  $F_m$ . On choisit de mesurer cette amplitude en début de chaîne<sup>3</sup>. Une difficulté apparaît ici : pour les ondes de forte amplitude, l'intensité au centre du grain va passer plusieurs ordres  $p$  lorsque l'onde va le traverser. Il faut donc arriver, et cela de façon automatique, à déterminer l'ordre  $p$  de la frange correspondant au maximum de l'onde  $F_{\max}$ . De plus, en ne prenant que la mesure de l'intensité au centre  $I_{\text{centre}}$ , il est très délicat de savoir si on se trouve juste avant ou juste après un extremum d'intensité  $I_{\max}$  ou  $I_{\min}$ . Pour déterminer la force  $F_m$ , on va coupler la méthode de  $I_{\text{centre}}$  à une autre méthode que je présente ci-après.

#### Nouvelle méthode de traitement des images photoélastiques

On cherche à mesurer la force qui agit sur un grain en mesurant la distance entre les deux franges noires les plus à l'extérieur du grain. Cette méthode n'est donc valable qu'une fois la première frange noire passée, *i.e* à partir de l'ordre  $p = 1$  (ou encore pour des forces supérieures à  $\Delta F/2 \approx 21$  N).

On procède à une calibration préalable en reprenant les images qui nous ont servies pour la calibration de  $I_{\text{centre}}$  présentée au § III.5. Nous mesurons l'intensité transmise par le grain suivant l'axe  $x$  perpendiculaire à l'axe de compression (Fig. V.6). On détermine ensuite la distance  $d_{\min}$  entre les deux minima de l'intensité. On a tracé sur la figure V.7 les résultats de notre calibration : il s'agit de l'évolution de  $d_{\min}$  avec la force de compression  $F$ . Cela fournit la courbe de calibration. Par la suite et dans une situation où la force est inconnue, il suffira de mesurer cette distance  $d_{\min}$  et de se rapporter à cette courbe de calibration afin de déterminer  $F$ . De même que pour la première calibration, celle-ci a été effectuée (et donc

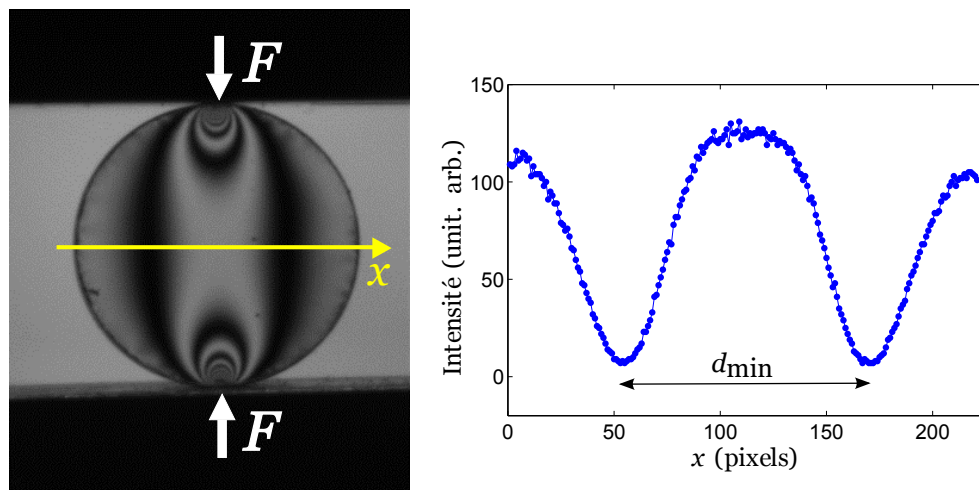
---

2. Je rappelle que  $F_m$  représente l'amplitude maximale de l'onde, à ne pas confondre avec  $F_{\max}$  la force totale maximale. Les deux quantités sont reliées par  $F_{\max} = F_0 + F_m$ .

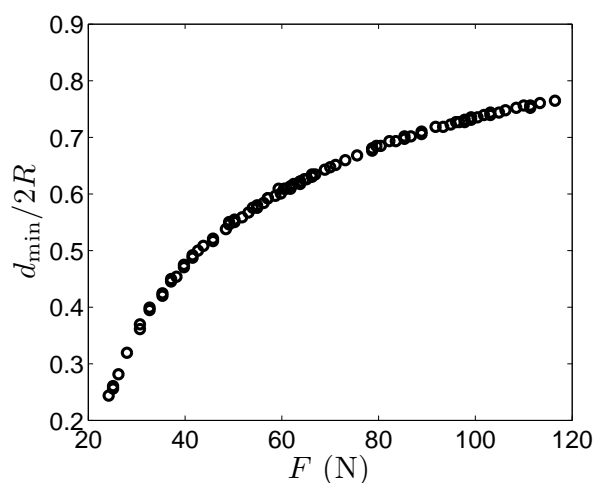
3. A cause de la dissipation, il se peut que l'amplitude du pulse en début de chaîne soit légèrement différente de celle en fin de chaîne. Toutefois, on a vu au § IV.4 que la dissipation était de l'ordre du newton sur une distance égale à la longueur de la chaîne. Cette perte est donc très petite par rapport à l'amplitude de l'onde évaluée au début de la chaîne. On en déduit que l'amplitude de l'onde doit être quasi identique en début et en fin de chaîne.

---

ne sera valable) que pour un grain soumis à deux forces diamétralement opposées.



**FIG. V.6** – Principe de la deuxième calibration pour déterminer la force de compression qui s'exerce sur un grain à partir des images photoélastiques. On mesure le profil de l'intensité transmise suivant l'axe  $x$  perpendiculaire à la direction de compression. On mesure ensuite la distance  $d_{\min}$  entre les deux minima, ce qui correspond à la distance entre les deux franges noires les plus à l'extérieur.

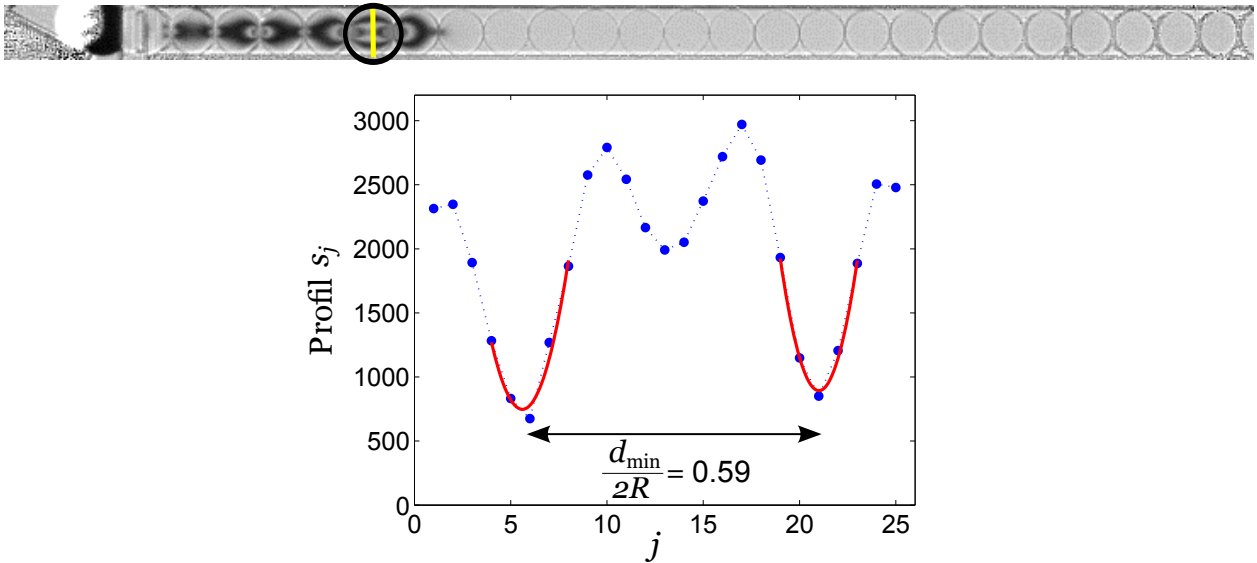


**FIG. V.7** – Courbe de calibration : évolution de la distance  $d_{\min}$  normalisée par le diamètre du grain en fonction de la force  $F$ . En pratique, pour une image où la force est inconnue, il suffit de mesurer  $d_{\min}$  et de se rapporter à cette courbe d'étalonnage pour en déduire  $F$ .

### Détermination de l'amplitude $F_m$ des ondes non-linéaires

Nous souhaitons mesurer l'amplitude de l'onde créée par l'impact. Pour cela nous allons utiliser les deux méthodes de traitement d'images que nous avons déjà présentées et que l'on note :  $I_{\text{centre}}$  et  $d_{\text{min}}$ . Mais une deuxième difficulté apparaît ici. Effectivement, on voit sur la Fig. V.5 que les franges à l'intérieur d'un grain ne sont pas toujours symétriques par rapport au centre du grain. Cela traduit que la force qui agit sur un grain n'est pas la même pour le contact de gauche et le contact de droite. Or, les deux méthodes de calibration que l'on a mises au point dans cette thèse l'ont été pour des grains où les franges sont symétriques. Pour palier à cette difficulté, on sélectionne à la main *une* image pour laquelle les franges sont symétriques dans *un* grain situé en début de chaîne car on définit l'amplitude en début de chaîne. Cette précaution nous permet d'utiliser les deux méthodes de calibration pour déterminer l'amplitude de l'onde en début de chaîne.

C'est le cas, par exemple, du grain schématisé par un contour noir sur la figure V.8. Il s'agit bien d'un grain situé en début de chaîne pour lequel, sur cette image, les franges sont



**FIG. V.8** – Détermination de l'amplitude de l'onde  $F_m$ . On choisit une image où un grain situé en début de chaîne, ici celui matérialisé par le contour noir, a des franges symétriques. On peut alors appliquer les deux méthodes de calibration. La méthode relative à  $I_{\text{centre}}$  donne  $F_{\text{max}} = 49 \text{ N}$ . Pour l'autre méthode, on mesure le profil  $s_j$  de l'intensité (où  $j$  est l'indice des pixels suivant la verticale). On effectue deux approximations paraboliques au niveau des minima et on en déduit la distance  $d_{\text{min}}$ . On trouve  $d_{\text{min}}/2R = 0.59$ . En se reportant à la courbe de calibration, on a  $F_{\text{max}} = 57 \text{ N}$ .

symétriques. Ainsi, pour ce film, c'est sur ce grain que l'on estime le maximum de l'onde  $F_{\max}$ . Le profil de l'intensité transmise  $s_j$  suivant la verticale ( $j$  est l'indice des pixels suivant la verticale) et qui passe par le centre du grain est tracé Fig. V.8. Au niveau des deux minima, on réalise une approximation parabolique afin de repérer la position de ces creux avec une meilleure précision. Ici, on obtient  $d_{\min}/2R = 0.59$ . En se reportant à la courbe de calibration (Fig. V.7), on trouve  $F_{\max} = 57$  N. La méthode relative à  $I_{\text{centre}}$  donne  $F_{\max} = 49$  N. Les deux mesures donnent des valeurs assez similaires. Par la suite, on fera la moyenne des valeurs données par ces deux méthodes et on soustrait  $F_0$  pour obtenir l'amplitude maximale  $F_m$ .

### V.3.2 Suivi du profil de l'onde

Nous voulons trouver un moyen pour suivre la propagation de l'onde dans la chaîne et retranscrire son profil particulier propre au régime non-linéaire. En effet, lorsque l'onde passe, on a vu que les deux contacts à droite et à gauche d'un grain n'étaient pas similaires ce qui empêche de faire l'hypothèse des grandes longueurs d'onde. On ne peut donc plus se contenter de prendre uniquement l'information au centre d'un grain, ce qui a pour effet de moyenniser la force au niveau des deux contacts.

Pour retranscrire les variations rapides de la force dues au passage de l'onde, on suit celle-ci en trois points de chaque grain : au centre (repéré par l'indice  $k = 2$ ) et en deux points (repérés par  $k = 1$  et  $k = 3$ ) situés à  $R/2$  du centre et sur la droite qui rejoint le centre de tous les grains. En chacun de ces trois points, on mesure le profil  $s_j$  de l'intensité lumineuse suivant la verticale qui passe par ce point. La figure V.9.a montre le profil  $s_j$  au centre des grains  $n = 8$  et  $n = 14$ . Plus la force qui agit sur le grain est grande, plus il y a de franges et donc plus le gradient de l'intensité est grande. Nous allons utiliser cette propriété.

Pour chaque valeur de  $k$ , pour chaque grain  $n$  et pour chaque image, on calcule ensuite la somme de la dérivée au carré du profil  $s_j$ , soit :

$$G_{n,k}^2(t) = \frac{1}{M-2} \sum_{j=2}^{M-1} [s_{j+1}(n, k, t) - s_{j-1}(n, k, t)]^2 \quad (\text{V.1})$$

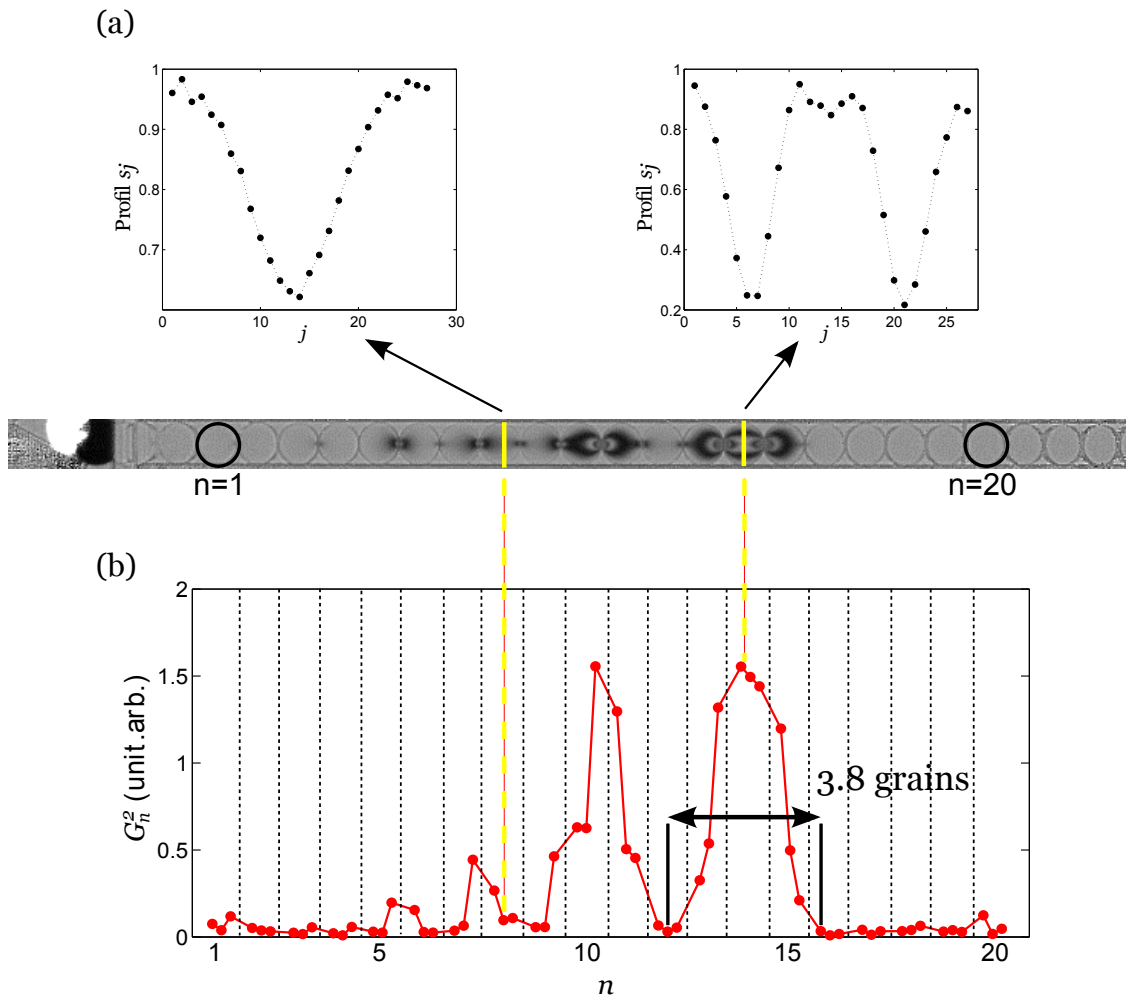
où  $M$  est le nombre de points du profil  $s_j$ .

Par construction,  $G^2$  évolue de façon monotone avec la force à laquelle est soumise le grain. Cette fonction permet donc de retranscrire l'allure de l'onde. La Fig. V.9 illustre l'allure spatiale de  $G_n^2$  pour les grains de  $n = 1$  à  $n = 20$  (pour chaque  $n$ , on a trois éléments



qui correspondent aux trois points  $k = 1, 2, 3$ ). On note une très bonne correspondance qualitative entre l'image du film et l'allure de la courbe  $G_n^2$ . Pour les grains où l'onde n'est pas arrivée,  $G_n^2$  est nulle. On retrouve aussi les deux pulses principaux séparés par un grain, comme c'est le cas sur la figure. A partir de ce graphe, on estime la largeur du premier pulse : on trouve que ce pulse a une largeur égale à environ 3.8 grains.

On a donc trouvé une méthode pour déterminer le profil de l'onde à une échelle inférieure à la taille du grain et ainsi observer les variations rapides de l'onde. Cela nous servira pour estimer la vitesse de propagation du premier front d'onde.



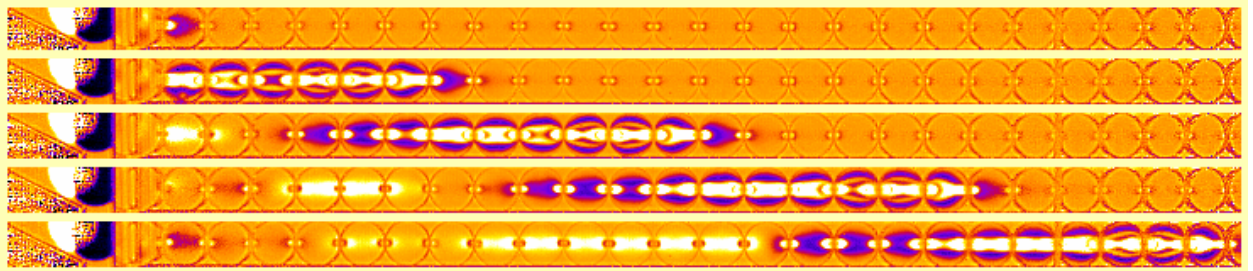
**FIG. V.9** – (a) : Pour chaque couple  $(n, k)$ , on mesure le profil vertical  $s_j$  de l'intensité. Les deux figures représentent  $s_j$  au centre ( $k = 2$ ) des grains  $n = 8, 14$ . On calcule ensuite la dérivée au carré  $G_{n,k}^2$ . (b) : Allure spatiale de  $G_n^2$  correspondant à l'image du dessus. Remarquons que pour chaque grain  $n$ ,  $G_n^2$  est composée de trois éléments : la mesure au centre ( $k = 2$ ) et les deux mesures à  $R/2$  ( $k = 1$  et  $k = 3$ ). Qualitativement, on trouve une très bonne correspondance entre la photo et la courbe  $G_n^2$ . On détermine la largeur du pulse : on trouve une largeur égale à 3.8 grains.

## V.4 Résultats

### V.4.1 Profil de l'excitation

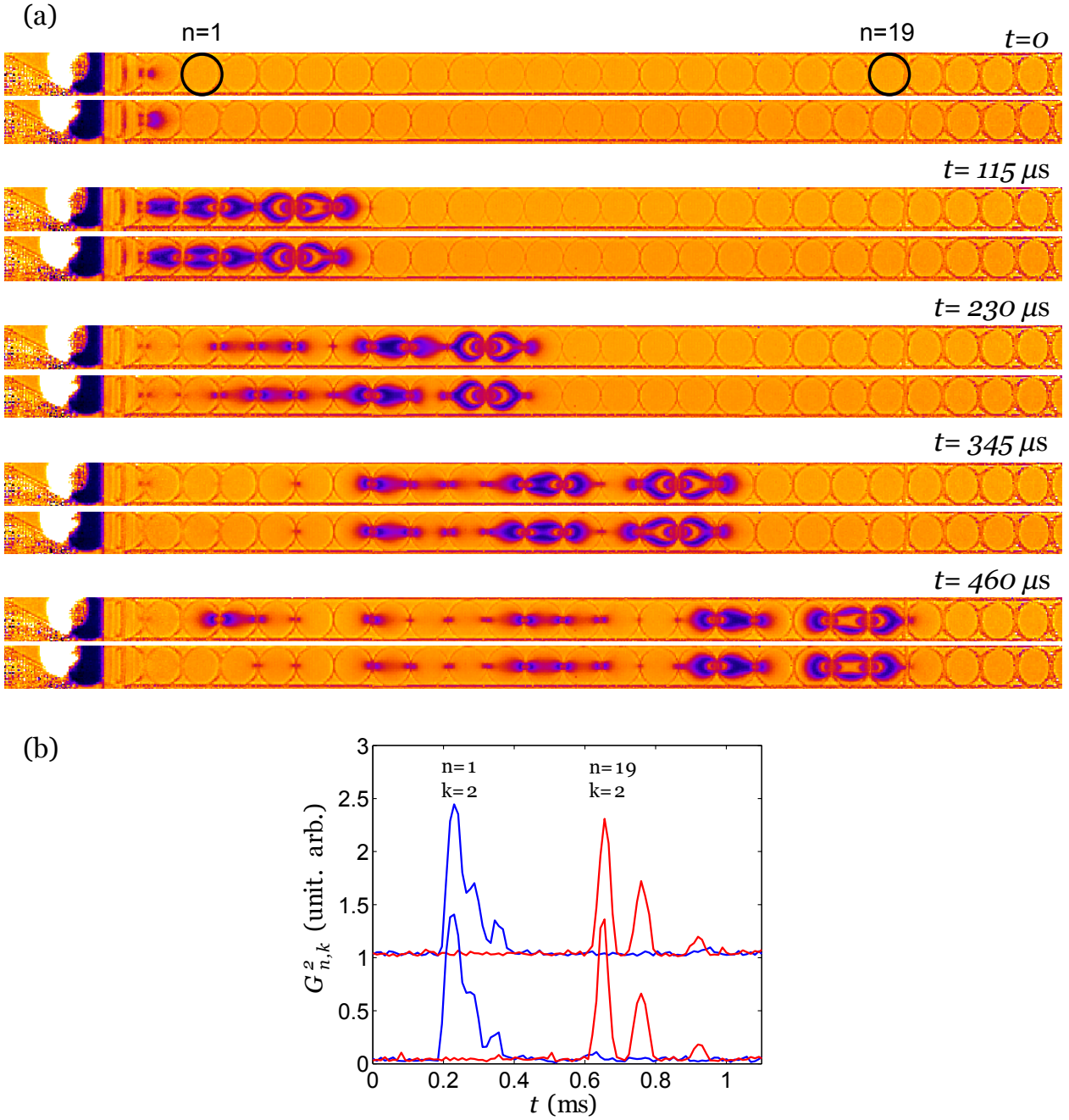
Avant de s'intéresser à l'évolution de la vitesse  $V$  des ondes en régime fortement non-linéaire, nous allons discuter qualitativement l'allure du profil de l'onde en fonction de la force statique de confinement  $F_0$ . Nous avons observé deux types de profils différents en fonction de  $F_0$ .

Par exemple, la figure V.10 montre la propagation du pulse d'amplitude  $F_m = 75$  N dans une chaîne soumise à  $F_0 = 13$  N. On constate que l'onde a une largeur d'une douzaine de grains. L'onde a un front d'onde ascendant assez raide et un front d'onde descendant assez peu pentu. A l'intérieur de cette enveloppe, il n'y a pas de variation brutale de la force. La phase de compression est suivie d'une phase d'expansion où les grains sont moins comprimés qu'ils ne le sont à l'état initial. Cela avait déjà été observé en régime linéaire. Aux temps longs, tous les grains retrouvent la force  $F_0$ .



**FIG. V.10** — Visualisation de la propagation de l'onde de grande amplitude dans une chaîne soumise à une force statique de confinement de  $F_0 = 13$  N. L'amplitude de l'onde vaut  $F_m = 75$  N. Chaque image est séparée de  $115 \mu s$ .

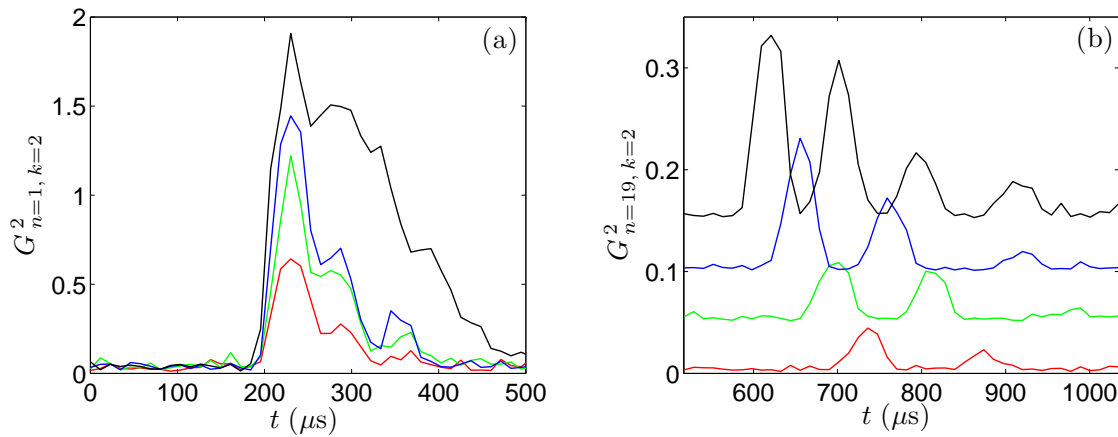
La Fig. V.11 illustre la propagation de l'onde d'amplitude  $F_m = 52$  N dans une chaîne soumise à  $F_0 = 1$  N. Pour chaque temps, les deux images correspondent à deux expériences différentes. On a aussi tracé les profils de  $G_{n,k}^2$  pour les grains  $n = 1$  et  $n = 19$  en fonction du temps. Le graphique et les images nous permettent de voir que le profil de l'onde est tout à fait reproductible. On constate que l'onde se décompose très rapidement en une série de paquets assez fins et séparés entre eux par environ 1 grain. A partir de la Fig. V.9, nous avons estimé la largeur du pulse à 3.8 grains. Entre les différents pics, la force est nulle. Les variations de force dans la chaîne sont donc très brutales puisque sur une distance de 3 – 4 grains, on passe d'une force de plusieurs dizaines de newtons à une force nulle. Pour ce genre



**FIG. V.11** – (a) : Visualisation de la propagation de l'onde de grande amplitude ( $F_m = 52$  N) dans une chaîne soumise à une force statique de confinement de  $F_0 = 1$  N. Pour chaque temps, les deux images correspondent à deux expériences différentes. On observe la décomposition du pulse en paquets très fins dont la largeur est égale à 2 – 3 grains. Ce profil est très reproductible. (b) : Allure de la fonction  $G^2_{n,k}$  pour les grains  $n = 1$  et  $n = 19$ . Les profils sont tout à fait similaires dans les deux expériences. On observe bien la décomposition du pulse initial en trois pics plus fins et d'amplitudes décroissantes. Les courbes ont été décalées pour une meilleure visibilité.

d'excitations, il est évident que l'approximation « onde de grande longueur d'onde » utilisée pour le développement des ondes solitaires de Nesterenko peut être remise en question. On a déjà mentionné au Chap. II pour une chaîne de sphères que lorsque l'impact est trop long, le pulse initial se décompose en une série de pics plus fins qui ont chacun la largeur de l'onde solitaire de Nesterenko. D'amplitudes décroissantes, ces pics se propagent à des vitesses différentes, ce qui tend à les séparer de plus en plus.

Nous avons fait varier le temps d'impact en variant la vitesse de la bille impactante pour voir l'effet sur la décomposition du pulse<sup>4</sup>. La figure V.12 montre le profil temporel de  $G_{n,k}^2$  pour les grains  $n = 1$  et  $n = 19$ . Lorsque la vitesse de la bille impactante augmente, le pulse généré est plus important et plus long. Au 19<sup>ème</sup> grain, on voit que le pulse initial s'est décomposé en pics plus fins qui se propagent à des vitesses différentes. On remarque que le nombre de pics produits lors de la décomposition augmente lorsque le temps d'impact initial croît. Sur cette figure, on compte deux puis trois et enfin quatre pics significatifs. Cela confirme que c'est bien la largeur du pulse initial qui contrôle la décomposition et le nombre de pics significatifs.



**FIG. V.12** – (a) : Allure temporelle de la fonction  $G_{n,k}^2$  pour le grain  $n = 1$  situé en début de chaîne pour différentes vitesses de la bille impactante. Lorsque la vitesse augmente, l'amplitude du pulse croît ainsi que sa durée. (b) : Allure de la fonction  $G_{n,k}^2$  pour le grain  $n = 19$  situé en milieu de chaîne. Le pulse initial se décompose en un certain nombre de pics fins et d'amplitudes décroissantes. Chaque pic se propage à des vitesses différentes. Le nombre de pics produits augmente lorsque le temps de contact croît. Les courbes ont été décalées pour une meilleure visibilité.

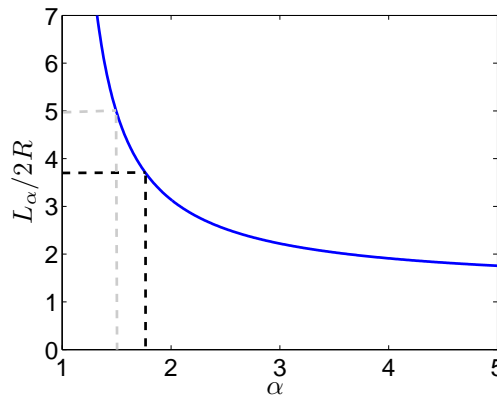
Il semble que l'on retrouve qualitativement les mêmes observations que celles faites sur la

4. On peut aussi imaginer d'autres expériences où l'on ferait varier la masse et/ou la dureté de la bille pour voir l'effet sur le type d'ondes excitées.

chaîne 1D de sphères. De surcroît, la photoélasticité permet de visualiser cette décomposition de grains en grains. Quantitativement, on trouve une différence par rapport à la chaîne de sphères. Effectivement, on a déterminé que la largeur du pic vaut 3.8 grains alors que l'onde solitaire de Nesterenko dans une chaîne de sphères a une largeur de 5 grains (Eq. II.47). En supposant une loi de contact du type  $F = A_\alpha \delta^\alpha$  avec  $\alpha > 1$ , l'analyse de Nesterenko se généralise et on trouve que la largeur  $L_\alpha$  de l'onde solitaire est donnée par [53, 124] :

$$L_\alpha = \frac{2R\pi}{\alpha - 1} \sqrt{\frac{\alpha(\alpha + 1)}{6}} \quad (\text{V.2})$$

On a tracé sur la figure V.13 l'allure de la largeur  $L_\alpha$  en fonction de la puissance  $\alpha$ .



**FIG. V.13** – Largeur  $L_\alpha$  de l'onde solitaire obtenue pour une loi de contact du type  $F = A_\alpha \delta^\alpha$ . On trouve  $L_\alpha \approx 3.8$  grains pour  $\alpha \approx 1.75$ . On retrouve bien une largeur de 5 grains pour  $\alpha = 1.5$ .

On trouve une largeur  $L_\alpha \approx 3.8$  grains pour  $\alpha \approx 1.75$ . Cette valeur est tout à fait cohérente avec celle que l'on a mesuré expérimentalement, qui vaut je le rappelle 1.78, pour la loi «  $F_0 - \delta$  » (§ III.3.3). Néanmoins, on peut se demander pourquoi c'est la puissance 1.78 (obtenue pour  $F_0 < 20$  N) et non pas la puissance 1.37 (obtenue pour  $F_0 > 20$  N) qui contrôle la largeur du pic alors que l'amplitude de celui-ci est supérieure 50 N. Ce point n'est pas encore élucidé et demande d'autres investigations.

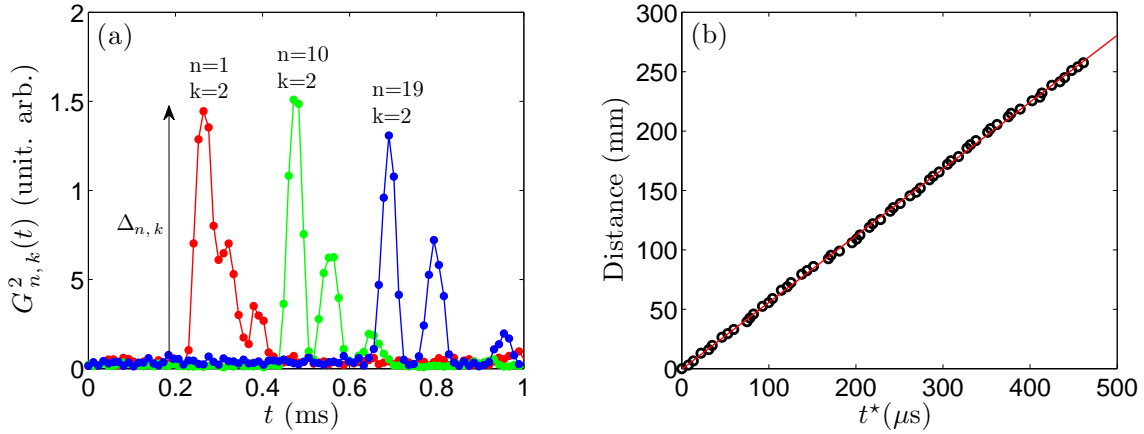
Rappelons quand même que pour de telles tailles, l'approximation « onde de grande longueur d'onde » nécessaire à l'analyse de Nesterenko et les résultats qui en découlent peuvent être remis en cause. Nous devons également mieux analyser le changement d'aspect de l'onde avec la force  $F_0$ .

### V.4.2 Vitesse des ondes en régime non-linéaire

Nous allons désormais nous focaliser sur l'évolution de la vitesse  $V$  de l'onde en fonction de son amplitude  $F_m$ . Nous avons déjà décrit la méthode pour déterminer l'amplitude  $F_m$ . Il nous reste à déterminer  $V$ . Pour cela, on analyse la fonction  $G_{n,k}^2$  en trois points du grain  $n$  : le centre du grain ( $k = 2$ ) et les deux points distants de  $R/2$  du centre ( $k = 1, 3$ ). On analyse donc  $3n$  points.

On a tracé sur la Fig. V.14.a l'allure de  $G_{n,k}^2(t)$  pour le centre ( $k = 2$ ) des grains  $n = 1, 10, 19$ . On observe de nouveau que le pulse initial se décompose en une série de trois pics d'amplitudes décroissantes. Ces pics sont de plus en plus espacés au cours de la propagation, preuve que leurs vitesses sont différentes. Nous pourrions essayer d'estimer la vitesse de ces différents pics en fonction de leur amplitude respective. Nous n'avons pas encore fait cette analyse. Pour l'instant, nous choisissons de mesurer la vitesse  $V$  du premier front d'onde ascendant.

En chacun des  $3n$  points, on cherche le temps  $t^*$  pour lequel :



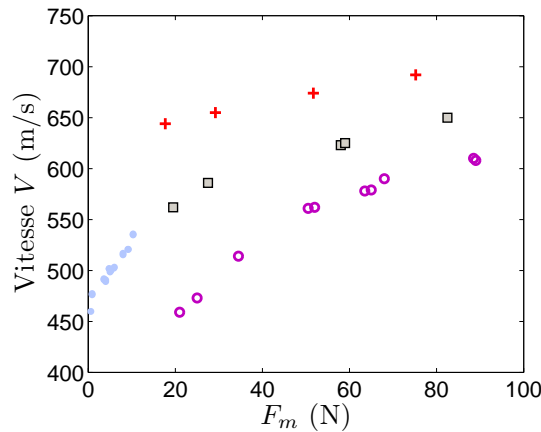
**FIG. V.14** – (a) : Pour chaque point  $(n, k)$ , on cherche le temps  $t^*$  pour lequel  $G_{n,k}^2(t^*) = 0.15\Delta_{n,k}$ . Les trois courbes correspondent au centre ( $k = 2$ ) des grains  $n = 1, 10, 19$ . On observe bien la décomposition du pulse en une série de pics d'amplitudes décroissantes. Il semble que les pics sont de plus en plus espacés au cours de la propagation, ce qui signifie qu'ils ont des vitesses différentes. Nous choisissons de mesurer la vitesse du premier front d'onde ascendant. (b) : Distance parcourue par le front d'onde ascendant en fonction du temps  $t^*$ . La pente de cette courbe donne la vitesse  $V$ . Dans cet exemple, on a  $V = 562 \text{ m/s}$ .

$$G_{n,k}^2(t^*) = 0.15\Delta_{n,k} \quad (\text{V.3})$$

où  $\Delta_{n,k} = \max [G_{n,k}^2]$  (Fig. V.14).

$\Delta_{n,k}$  correspond à la valeur maximale de  $G^2$  au point  $(n, k)$ . Par construction,  $t^*$  représente l'instant où la variable  $G_{n,k}^2$  passe d'une valeur nulle à une valeur positive, ce qui traduit bien l'arrivée du premier front d'onde ascendant au point  $(n, k)$ .

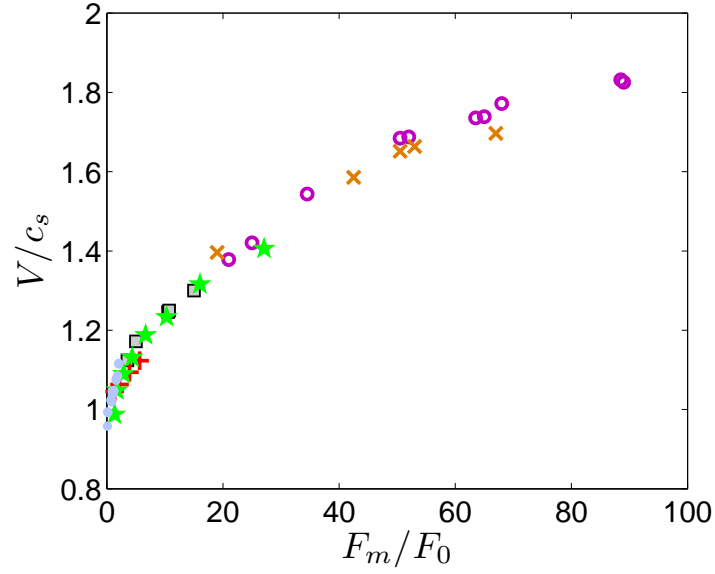
On a tracé sur la Fig. V.14.b la distance parcourue par l'onde en fonction du temps  $t^*$ . On observe que cette distance croît linéairement avec le temps : la pente de cette droite nous renseigne sur la vitesse  $V$ . On a réitéré ces expériences en faisant varier  $F_0$  et  $F_m$ . La Fig. V.15 montre l'évolution de la vitesse  $V$  en régime non-linéaire avec l'amplitude de l'onde  $F_m$ .



**FIG. V.15** – Vitesse des ondes en régime non-linéaire en fonction de leur amplitude  $F_m$ . Les paramètres sont :  $F_0 = 1$  N ( $\circ$ ),  $F_0 = 5.5$  N ( $\square$ ),  $F_0 = 13$  N ( $+$ ). Les points ( $\bullet$ ) sont ceux obtenus en régime faiblement non-linéaire et déjà représentés Fig. V.3.

On a pu faire varier l'amplitude  $F_m$  de l'onde entre 0.5 N et 90 N. Je rappelle qu'avec la première méthode utilisant le haut-parleur, l'amplitude n'excédait pas une dizaine de newtons. On se rend compte ici de l'intérêt de la méthode de la bille impactante. On voit que la vitesse  $V$  augmente avec l'amplitude de l'onde. En régime non-linéaire, les ondes sont supersoniques c'est-à-dire que leurs vitesses sont supérieures à la vitesse des ondes sonores en régime linéaire pour la même force  $F_0$ . En effet, pour  $F_0 = 1$  N, on a  $c_s = 330$  m/s et  $V \in [460, 610$  m/s] pour  $F_m \in [20, 90$  N]. De même, pour  $F_0 = 5$  N, on a  $c_s = 500$  m/s et  $V \in [560, 650$  m/s] pour  $F_m \in [20, 80$  N]. La croissance de la vitesse avec  $F_m$  est d'autant plus grande que la force statique est petite.





**FIG. V.16** – Vitesse adimensionnée  $V/c_s$  en fonction de  $F_m/F_0$ . Les différents symboles représentent des expériences faites à des forces statiques  $F_0$  différentes. Tous les points se mettent sur une même courbe traduisant le fait que  $V/c_s$  est uniquement fonction du rapport  $F_m/F_0$ .

Enfin, on a tracé Fig. V.16 le rapport  $V/c_s$  en fonction de  $F_m/F_0$ . Toutes les valeurs sont supérieures à 1 ce qui signifie bien que les ondes en régime non-linéaire sont supersoniques. On remarque que tous les points se mettent sur une même courbe maîtresse traduisant le fait que  $V/c_s$  est uniquement fonction du rapport  $F_m/F_0$ . On retrouve un résultat [53] que l'on avait rappelé pour une chaîne de sphères (Eq. II.45) et qui a été vérifié expérimentalement par Coste, Falcon et Fauve [61] et illustré sur la Fig. II.9.b.

On va maintenant généraliser ce résultat pour une loi de contact quelconque du type  $F = A_\alpha \delta^\alpha$  avec  $\alpha > 1$ .

### V.4.3 Détermination de la vitesse $V$ des ondes solitaires pour une loi de puissance du type $F = A_\alpha \delta^\alpha$

Nous allons mener ici le même calcul que celui mené au § II.1.4 mais en le généralisant pour une loi de contact du type  $F = A_\alpha \delta^\alpha$  avec  $\alpha > 1$ . Nous souhaitons obtenir les expressions de  $V$  et  $c_s$  en fonction de  $F_0$ ,  $F_m$  et  $\alpha$ . Je présente ici les différentes étapes du calcul qui est relativement fastidieux.



La dynamique de la chaîne est régie par les équations différentielles couplées suivantes :

$$M\ddot{u}_i = A_\alpha [(u_{i-1} - u_i)_+^\alpha - (u_i - u_{i+1})_+^\alpha] \quad (\text{V.4})$$

En procédant exactement de la même manière qu'au § II.1.4 (passage à la limite continue et recherche de solution sous la forme  $u(x, t) = u(\xi = x - Vt)$ ) et en posant  $c_\alpha^2 = A_\alpha (2R)^{\alpha+1}$ ,  $\Psi = -u_\xi$ ,  $\xi = 2R\eta\sqrt{\alpha/6(\alpha+1)}$  et  $y = (c_\alpha/V)^{(\alpha+1)/(\alpha-1)} \Psi^{(\alpha+1)/2}$ , on aboutit à :

$$y_{\eta\eta} = -\frac{dW(y)}{dy} \quad \text{avec} \quad W(y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{\alpha+1}{4}y^{\frac{4}{\alpha+1}} + Cy^{\frac{2}{\alpha+1}} \quad (\text{V.5})$$

où  $C$  est une constante d'intégration.

Puisque l'on cherche des ondes localisées, la solution vérifie :

$$y \rightarrow y_\infty \quad \text{et} \quad y_{\eta\eta} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \eta \rightarrow \pm\infty \quad (\text{V.6})$$

si bien que la constante  $C^{ste}$  vaut :

$$C = \frac{\alpha+1}{2} \left[ y_\infty^{\frac{2}{\alpha+1}} - y_\infty^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \right] \quad (\text{V.7})$$

De plus, l'amplitude  $y_m$  de l'onde est donnée par :  $W(y_m) = W(y_\infty)$ . En remplaçant l'expression de  $C$  par l'Eq. V.7 dans cette égalité, on obtient :

$$\frac{\alpha+1}{4}y_\infty^{\frac{4}{\alpha+1}} - \frac{\alpha}{2}y_\infty^2 = \frac{1}{2}y_m^2 - \frac{\alpha+1}{4}y_m^{\frac{4}{\alpha+1}} + \frac{\alpha+1}{2} \left( y_\infty^{\frac{2}{\alpha+1}} - y_\infty^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \right) y_m^{\frac{2}{\alpha+1}} \quad (\text{V.8})$$

En revenant à la variable  $\Psi$ , cette dernière relation s'écrit :

$$\left(\frac{c_\alpha}{V}\right)^2 [\alpha\Psi_\infty^{\alpha+1} + \Psi_m^{\alpha+1} - (\alpha+1)\Psi_\infty^\alpha\Psi_m] = \frac{\alpha+1}{2}\Psi_\infty^2 + \frac{\alpha+1}{2}\Psi_m^2 - (\alpha+1)\Psi_m\Psi_\infty \quad (\text{V.9})$$

On en déduit l'expression de la vitesse  $V$  des ondes solitaires en fonction de  $\Psi_\infty$ ,  $\Psi_m$  et  $\alpha$  :

$$V = c_\alpha \sqrt{\frac{2}{(\alpha+1)} \frac{[\alpha\Psi_\infty^{\alpha+1} + \Psi_m^{\alpha+1} - (\alpha+1)\Psi_\infty^\alpha\Psi_m]^{1/2}}{\Psi_m - \Psi_\infty}} \quad (\text{V.10})$$

Cette expression permet de déduire la célérité  $c_s$  des ondes sonores en régime linéaire dans une chaîne de grains qui interagissent avec une loi de contact  $F = A_\alpha\delta^\alpha$ . Dans ce cas, en posant  $\Psi_m = \Psi_\infty + \epsilon$  avec  $\epsilon \ll \Psi_\infty$ , on aboutit à :

$$c_s = c_\alpha \sqrt{\alpha} \Psi_\infty^{\frac{\alpha-1}{2}} \quad (\text{V.11})$$

On peut maintenant calculer le rapport  $V/c_s$  :

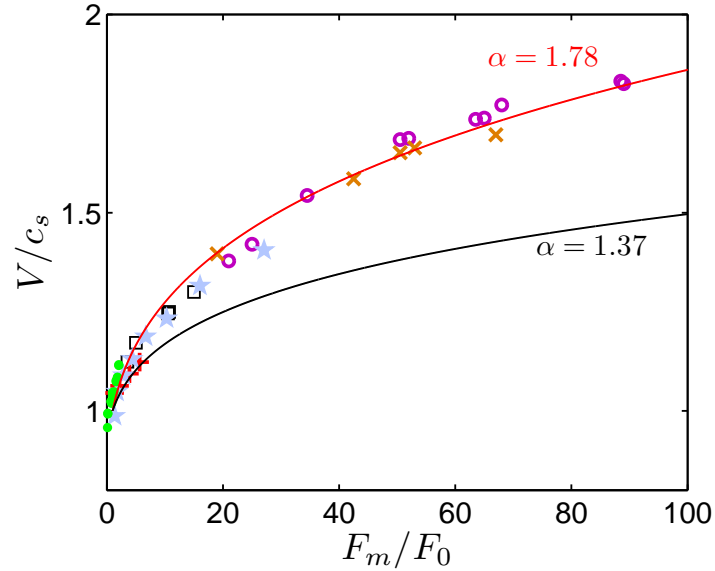
$$\frac{V}{c_s} = \sqrt{\frac{2}{\alpha(\alpha+1)}} \frac{\left[ \alpha + \left( \frac{\Psi_m}{\Psi_\infty} \right)^{\alpha+1} - (\alpha+1) \left( \frac{\Psi_m}{\Psi_\infty} \right) \right]^{1/2}}{\left( \frac{\Psi_m}{\Psi_\infty} \right) - 1} \quad (\text{V.12})$$

En se rappelant que  $\Psi = \delta/2R$  (Eq. II.27) et  $F = A_\alpha \delta^\alpha$ , on trouve l'expression de  $V/c_s$  en fonction de  $F_m$ ,  $F_0$  et  $\alpha$  :

$$\frac{V}{c_s} = \sqrt{\frac{2}{\alpha(\alpha+1)}} \frac{\left[ \alpha + \left( \frac{F_m}{F_0} \right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} - (\alpha+1) \left( \frac{F_m}{F_0} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{1/2}}{\left( \frac{F_m}{F_0} \right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1} \quad (\text{V.13})$$

On voit que quelque soit la puissance  $\alpha > 1$ , le rapport  $V/c_s$  ne dépend que du rapport  $F_m/F_0$  et de la puissance  $\alpha$ . En posant  $\alpha = 3/2$ , on retrouve bien l'Eq. II.45.

Sur la figure V.17, on a tracé  $V/c_s$  en fonction de  $F_m/F_0$ . On a aussi tracé la courbe théorique donnée par l'Eq. V.13 pour les deux lois de puissance trouvées expérimentalement (cf. § III.3.3) pour la relation «  $F_0 - \delta$  », *i.e*  $\alpha = 1.78$  et  $\alpha = 1.37$ .



**FIG. V.17** – Même graphique que la Fig. V.16. Les deux courbes correspondent à l'Eq. V.13 avec  $\alpha = 1.78$  et  $\alpha = 1.37$ . Ces deux valeurs correspondent aux puissances obtenus expérimentalement dans la loi de contact «  $F_0 - \delta$  » respectivement pour  $F_0 < F_c$  et  $F_0 > F_c$ . La valeur  $\alpha = 1.78$  ajuste très bien les données expérimentales.

La puissance  $\alpha = 1.78$  ajuste très bien les données expérimentales sans aucun paramètre ajustable. Cela valide la généralisation du calcul de Nesterenko que l'on a faite pour obtenir

la vitesse  $V$ . Pourtant ce calcul suppose le passage à la limite continue, ce qui est assez loin d'être le cas dans nos expériences. En revanche, la puissance  $\alpha = 1.37$  obtenue pour les grandes forces dans la loi  $\ll F_0 - \delta \gg$  et  $\ll F_0 - V \gg$  (et plus conforme à ce qu'on peut attendre pour une loi de contact entre des cylindres) est en net désaccord avec nos mesures.

Il semble donc qu'en régime non-linéaire et dans la gamme de  $F_m/F_0$  explorée, le contact entre les cylindres est fortement non-linéaire et est régie par une loi de puissance du type  $F = A_\alpha \delta^\alpha$  avec  $\alpha = 1.78$ . Les points expérimentaux  $V/c_s$  sont en très bon accord avec le modèle théorique et sont cohérents avec les résultats de la mesure  $\ll F_0 - \delta \gg$ . Cette puissance est aussi cohérente avec la mesure de la largeur  $L_\alpha$  du pic. En effet, l'analyse de Nesterenko prévoit un pic de largeur égale à environ 3.8 grains pour  $\alpha \approx 1.75$ . En revanche, le fait que la puissance  $\alpha = 1.78$  soit privilégiée par rapport à l'autre puissance  $\alpha = 1.37$  n'est pas encore élucidé.

## V.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la propagation d'ondes dans une chaîne 1D de cylindres en régime non-linéaire. Cela signifie que l'amplitude  $F_m$  de l'onde est grande (voire très grande) par rapport à la force statique de confinement  $F_0$ . Pour accéder à de grandes amplitudes, l'emploi du haut-parleur pour générer l'onde n'est plus approprié.

Nous utilisons alors l'impact d'une bille de verre (quatre fois plus massive que les grains de la chaîne) avec le premier grain de la chaîne. En fonction de la force statique de confinement  $F_0$ , on observe deux types de profils d'ondes. Pour les grandes valeurs de  $F_0$  (nous n'avons pas encore précisément mesuré la force à laquelle on change de profil), l'onde a une taille d'une douzaine de grains. Les variations spatiales de l'onde sont assez grandes par rapport au diamètre des grains. Après la phase de compression, on observe une phase d'expansion où les grains sont moins comprimés qu'ils ne le sont à l'état initial. Pour les petites valeurs de  $F_0$ , le pulse initial se décompose très rapidement en une série de pics fins et d'amplitudes décroissantes. Chacun de ces pics se propagent à des vitesses différentes. Le nombre de ces pics augmente lorsque le temps de contact croît. Ces observations ont déjà été faites pour des chaînes de sphères. En revanche, la décomposition du pulse n'avait jamais été visualisé par la photoélasticité. De plus, on a mesuré que la largeur du pic est d'environ de 3.8 grains, soit une largeur inférieure à la taille de 5 grains prévue pour le soliton de Nesterenko dans une

---

chaîne de sphères. En généralisant l'analyse de Nesterenko pour une loi de contact du type  $F \propto \delta^\alpha$ , on trouve qu'une telle largeur de 3.8 grains correspond à une puissance  $\alpha \approx 1.75$ . Cette valeur est tout à fait cohérente avec celle que l'on a mesuré expérimentalement pour la loi de contact  $\ll F_0 - \delta \gg$  pour les faibles compressions. Notons tout de même que pour des ondes de cette taille, l'hypothèse de « grande longueur d'onde » utilisée par Nesterenko peut être remise en question.

Ensuite, nous avons mesuré la dépendance entre la vitesse  $V$  et l'amplitude  $F_m$  des ondes. Nous avons choisi de mesurer la vitesse du premier front d'onde ascendant. Nous avons pour cela élaboré un protocole de traitement d'images propres au régime non-linéaire pour déterminer  $F_m$  et  $V$ . Une analyse intéressante serait de mesurer la vitesse des différents pics en fonction de leurs amplitudes respectives.

Nous avons observé que les ondes en régime non-linéaire sont supersoniques et que leurs vitesses augmentent avec  $F_m$ . Cette augmentation est d'autant plus forte que la force  $F_0$  est petite. En normalisant la vitesse  $V$  par la vitesse  $c_s$  des ondes en régime linéaire, tous les points expérimentaux se mettent sur une même courbe en fonction de  $F_m/F_0$ . Cela traduit que  $V/c_s$  est seulement fonction du rapport  $F_m/F_0$ . Cela avait déjà été vu pour des sphères. Nous avons généralisé le calcul de Hertz afin d'obtenir l'expression de  $V/c_s$  pour une loi de contact du type  $F \propto \delta^\alpha$ . On montre alors que le rapport  $V/c_s$  n'est fonction que de  $F_m/F_0$  et de la puissance  $\alpha$ . La courbe théorique se superpose très bien aux points expérimentaux en prenant  $\alpha = 1.78$ . Cette valeur est celle trouvée expérimentalement pour la loi  $\ll F_0 - \delta \gg$  dans la gamme des faibles forces statiques  $F_0 < F_c$ . On retrouve la même puissance qui contrôle également la largeur du pic.

On peut conclure que les propriétés de l'onde en régime non-linéaire (et dans la gamme de force explorée) est régie par une loi de contact du type  $F \propto \delta^\alpha$  avec  $\alpha \approx 1.78$ . Cette puissance permet de retrouver la largeur du pic ainsi que la dépendance de  $V/c_s$  avec  $F_m/F_0$ . Cette puissance n'est pas un paramètre ajustable : il s'agit de la puissance que l'on a déterminée expérimentalement avec la loi  $\ll F_0 - \delta \gg$  pour les faibles compressions ( $F_0 < F_c \approx 20$  N). Le fait de trouver cette puissance et non pas l'autre ( $\alpha = 1.37$  pour  $F_0 > F_c$ ), qui s'approche davantage de ce qu'on attend pour le contact entre des cylindres parfaits, n'est pas encore très clair. On peut imaginer que puisqu'on détermine la vitesse du pic avec un point de référence en bas du pulse, l'amplitude associée à ce point est inférieure à  $F_c$ , ce qui explique que l'on trouve la puissance 1.78.

Cette étude permet de généraliser les résultats obtenus pour une chaîne de sphères et de voir

comment les propriétés de l'onde sont affectées par la loi de contact inter-grains.

Les chapitres IV et V étaient consacrés à l'étude de la propagation d'ondes sonores en régime linéaire et non-linéaire dans une chaîne unidimensionnelle de cylindres. Dans le prochain chapitre, on va passer à l'étude de la propagation d'ondes sonores en régime linéaire dans un empilement bidimensionnel de cylindres photoélastiques. Nous chercherons à mesurer les vitesses le long de chaînes de forces et de comparer ces résultats à ceux obtenus pour une chaîne 1D soumise à une force statique similaire.

# Chapitre VI

## Ondes sonores en régime linéaire dans un empilement bidimensionnel de cylindres

### Sommaire

---

<b>VI.1 Dispositif expérimental . . . . .</b>	<b>140</b>
<b>VI.2 Trajet des ondes et traitement d'images . . . . .</b>	<b>142</b>
VI.2.1 Trajet des ondes linéaires . . . . .	142
VI.2.2 Traitement d'images . . . . .	144
VI.2.2.1 Force moyenne le long d'une chaîne de force . . . . .	144
VI.2.2.2 Suivi de l'onde . . . . .	145
<b>VI.3 Vitesse des ondes dans un empilement bidimensionnel . . . . .</b>	<b>148</b>
VI.3.1 Détermination de la vitesse et incertitudes . . . . .	148
VI.3.2 Résultats pour un empilement avec un arrangement hexagonal . . .	152
VI.3.3 Résultats pour un empilement avec un arrangement carré . . . . .	152
<b>VI.4 Résumé et discussion . . . . .</b>	<b>156</b>
<b>VI.5 Perspectives . . . . .</b>	<b>158</b>

---

Dans ce chapitre, nous étudions la propagation d'ondes sonores en régime linéaire dans un empilement bidimensionnel de grains photoélastiques. Dans les études antérieures de Coste, Gilles et Jia portant sur des empilements bi- et tridimensionnels [55, 56], les auteurs s'intéressent à la relation entre la contrainte macroscopique appliquée à l'échantillon et la vitesse des ondes acoustiques. Cette mesure de vitesse se fait par la méthode du temps de vol entre deux points : l'émetteur et le récepteur<sup>1</sup>. Par contre, ils ne peuvent pas analyser comment se comporte l'onde au sein même du milieu. C'est ce que l'on a cherché à faire en utilisant des grains photoélastiques. Ainsi nous sommes capable de visualiser la propagation de l'onde en tous points du milieu, ce qui permet de faire des *mesures locales* de vitesse. Nous nous limiterons dans ce chapitre à des empilements ordonnés en géométrie carrée et hexagonale.

## VI.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est schématisé sur la Fig. VI.1. On utilise une cellule constituée d'une armature métallique en forme de U contre laquelle sont maintenues deux plaques de verre de même dimension que la pièce en U. L'épaisseur de la pièce métallique (et donc l'espace entre les deux plaques de verre) vaut 12 mm, soit une valeur légèrement supérieure à l'épaisseur d'un grain. On place les grains à l'intérieur de cette cellule. Dans les expériences que je présente, on a réalisé des empilements 2D avec des arrangements carrés ou hexagonaux. Typiquement, l'empilement est constitué d'une centaine de grains.

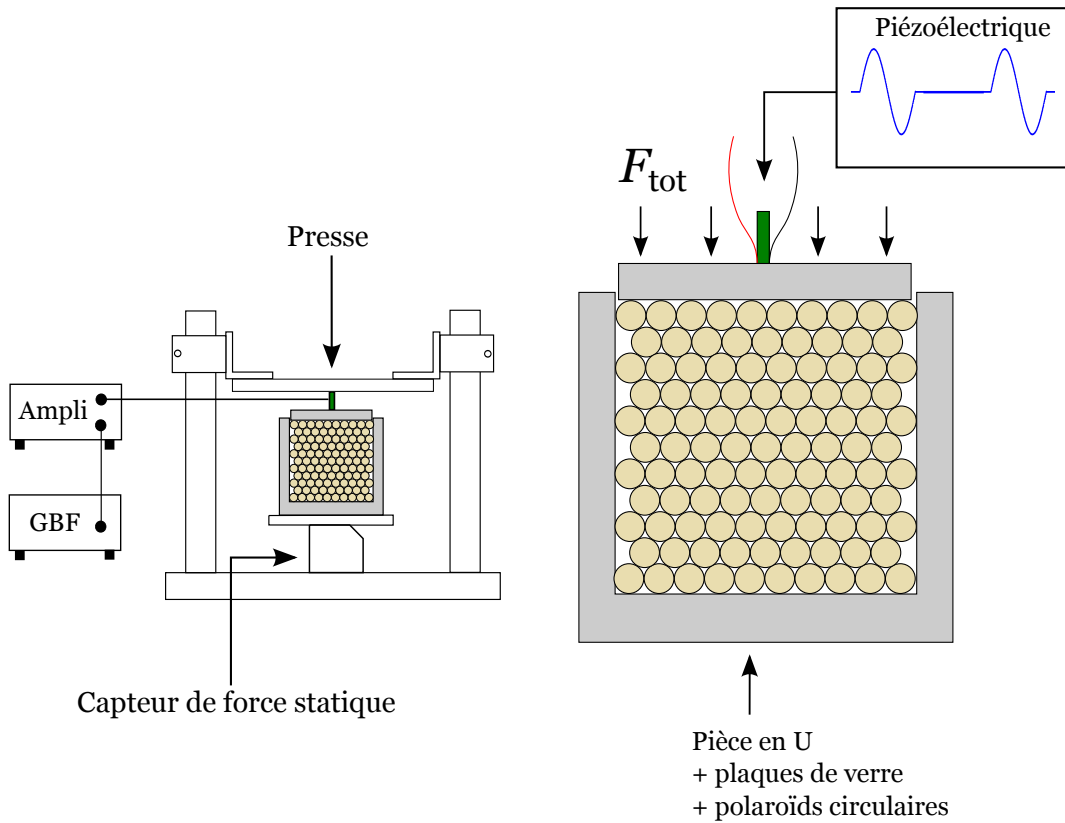
Sur les faces extérieures des plaques de verre, on fixe les polariseurs et analyseurs circulaires. La visualisation de la propagation des ondes se fait comme au chapitre précédent. La cellule est éclairée par trois projecteurs halogènes dont la composante alternative est annulée par un montage redresseur de tension. La lumière est filtrée par un filtre rouge centré autour de 650 nm située devant l'objectif de la caméra. On acquiert un film à une fréquence de 74074 images/s avec une résolution de  $144 \times 144$  pixels.

La cellule est posée sur le capteur de force statique lui-même fixé à la table optique. Afin

---

1. Notons à cette occasion que dans certaines de ces expériences, l'émetteur et le récepteur ont la même taille qu'un grain, tandis que dans d'autres, ils sont beaucoup plus grands. Dans ce cas, le signal mesuré est la somme des signaux reçus par plusieurs grains, ce qui tend à annuler la composante haute fréquence liée à la diffusion de l'onde par les hétérogénéités du milieu.

---

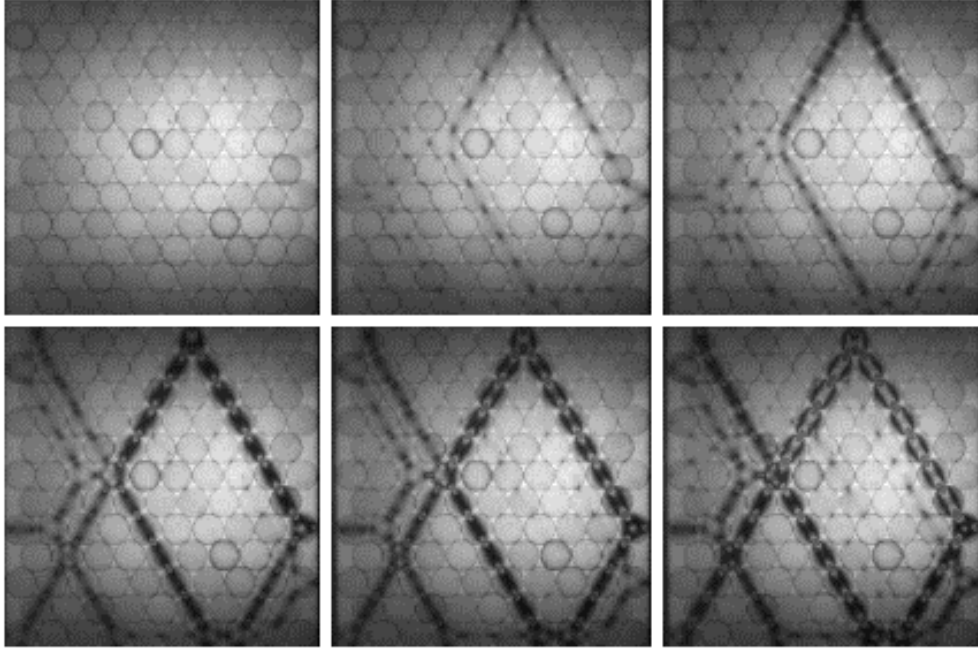


**FIG. VI.1** – *Dispositif expérimental utilisé pour les expériences sur des empilements bidimensionnels. La cellule contenant les grains est placée sur un capteur de force statique. On applique une force  $F_{\text{tot}}$  à l'empilement grâce à une presse. Une céramique piézoélectrique intercalée entre les deux pièces de la presse permet de générer une excitation acoustique. On suit la propagation de l'onde à l'aide d'une caméra rapide.*

d'appliquer une contrainte sur l'empilement, on a réalisé une presse. Celle-ci est constituée d'une large pièce horizontale en aluminium qui peut coulisser le long de deux cylindres verticaux. Au-dessus de la dernière rangée de grains, on pose une pièce métallique dont la taille a été ajustée pour être en contact avec tous les grains de cette rangée. On intercale entre ces deux pièces une céramique piézoélectrique. Cette céramique sera utilisée pour générer la perturbation. La presse appuie sur la céramique qui appuie à son tour sur l'autre pièce et transmet la force à l'échantillon. Il est important de noter que cette pièce a la même largeur que l'empilement et qu'à priori cette pièce est en contact avec tous les grains de la rangée supérieure. On est ainsi capable d'imposer une force  $F_{\text{tot}}$  à l'échantillon, de la faire varier et de la mesurer grâce au capteur de force statique. On voit sur la Fig. VI.2 que la force se répartit suivant un petit nombre de grains qui forment les fameuses *chaînes de forces*.

Le piézoélectrique appuie sur la pièce en aluminium qui transmet la force statique  $F_{\text{tot}}$  à





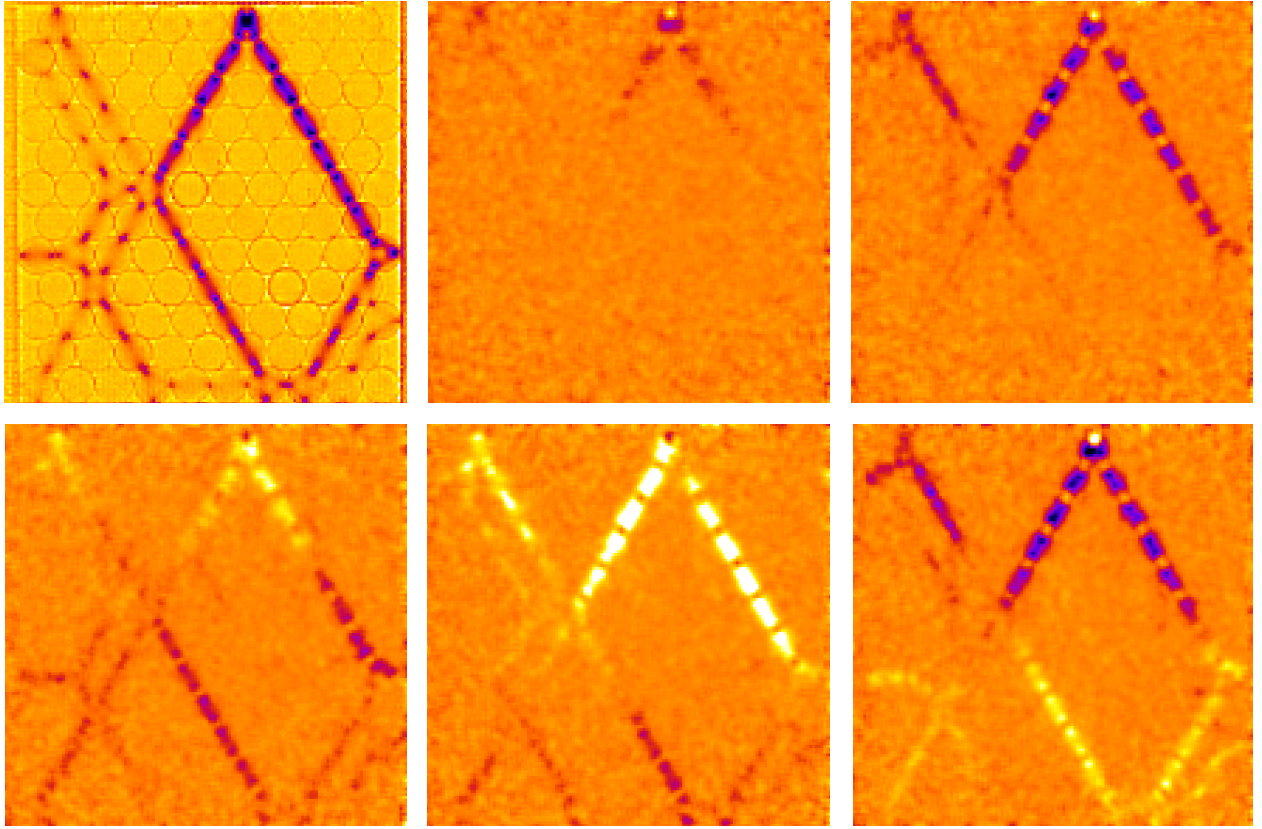
**FIG. VI.2** – Réponse à une force extérieure statique  $F_{\text{tot}}$  d'un empilement bidimensionnel de grains cylindriques photoélastiques rangés suivant un arrangement hexagonal. La force est appliquée via une plaque suivant toute la largeur de l'empilement. La force vaut  $F_{\text{tot}} = 0, 14, 28, 55, 70, 95$  N (de gauche à droite et de haut en bas). La force extérieure se répartit suivant un petit nombre de grains et forment les chaînes de forces.

l'empilement. De plus, tous les 50 ms, le piézoélectrique est alimenté par une arche de tension sinusoïdale de fréquence 2 kHz. En se déformant, le piézoélectrique crée l'excitation qui se propage dans le milieu. Par rapport à l'état initial où le milieu est soumis au chargement statique  $F_{\text{tot}}$ , celui-ci va subir une phase de compression (partie positive de l'arche sinusoïdale de la tension) et une phase d'expansion (partie négative de l'arche sinusoïdale de la tension). Dans toutes cette étude, l'amplitude des ondes générées sera petite par rapport à la force statique  $F_{\text{tot}}$  et aussi par rapport à la force moyenne le long d'une chaîne de forces. Il s'agira donc de la propagation d'ondes dans le régime linéaire.

## VI.2 Trajet des ondes et traitement d'images

### VI.2.1 Trajet des ondes linéaires

La Fig. VI.3 montre la propagation de l'excitation dans le milieu granulaire. L'image en haut à gauche correspond à l'empilement granulaire dans son état initial lorsqu'il est soumis



**FIG. VI.3** – *Propagation des ondes sonores en régime linéaire dans un empilement bidimensionnel avec un arrangement hexagonal. L'image en haut à gauche montre le système dans son état initial soumis à une force statique  $F_{\text{tot}} = 28 \text{ N}$ . Cette force statique se répartie suivant un réseau de chaînes de forces. Les cinq autres images ont été divisé par la première image et sont toutes séparées de  $175 \mu\text{s}$ . On visualise ainsi les variations d'intensité lumineuse provoquées par le passage de l'onde sonore. On voit clairement que l'onde emprunte exclusivement les chaînes de forces initiales.*

uniquement à la compression uniaxiale statique  $F_{\text{tot}} = 28 \text{ N}$ . Les cinq autres images montrent la propagation de l'onde sonore produite par la déformation du piézoélectrique. L'intervalle de temps entre chaque image est  $175 \mu\text{s}$ . Chacune des cinq images a été divisée par l'image initiale pour visualiser uniquement la perturbation. Dans cet exemple, puisqu'aucun grain n'a dépassé la frange  $p = 0$ , un grain qui apparaît avec une couleur foncée correspond à un grain soumis à une force plus importante qu'à l'état initial. Au contraire, une couleur claire signifie une force plus faible que celle dans l'état initial.

On voit clairement que les ondes générées en régime linéaire se propagent le long des chaînes de forces qui supportent la force statique. On visualise bien que chaque chaîne subie alternativement une phase de compression et une phase d'expansion par rapport à l'état initial de précontrainte. Nous allons donc chercher à mesurer la vitesse des ondes le long

des chaînes de forces et comparer ces résultats avec ceux obtenus pour une chaîne unidimensionnelle. Il nous faut donc trouver un moyen de mesurer la force moyenne<sup>2</sup>  $F_0$  le long d'une chaîne de force et de suivre l'onde pour mesurer sa vitesse. C'est l'objet du prochain paragraphe.

## VI.2.2 Traitement d'images

Nous souhaitons mesurer la vitesse<sup>3</sup>  $c_s$  des ondes sonores en régime linéaire le long des chaînes de forces et comparer ces résultats à ceux obtenus pour une chaîne unidimensionnelle. Il nous faut donc déterminer la force moyenne le long d'une ligne de force, et trouver une grandeur accessible pour chaque grain dont on puisse en déduire le temps de vol.

### VI.2.2.1 Force moyenne le long d'une chaîne de force

Pour chaque empilement, nous repérons les grains qui forment une chaîne de force et nous déterminons leur centre. Un exemple est donné Fig. VI.4.a. Dans celui-ci, on peut définir cinq chaînes de forces le long desquelles les grains sont soumis à des forces statiques identiques. En revanche, toutes ces chaînes sont soumises à des forces à priori différentes que l'on va chercher à mesurer. Typiquement, une chaîne est constituée de  $n \approx 6 - 7$  grains et un grain peut appartenir à plusieurs chaînes.

Pour déterminer la force statique qui agit sur chacun des grains d'une chaîne, nous utilisons la méthode de calibration du § III.5. Nous mesurons au centre de ces grains  $I_{\text{centre}}$ ,  $I_{\text{max,p}}$  et  $I_{\text{min,p}}$  pour ensuite calculer  $\zeta$  (Eq. III.30) puis enfin la force  $F_n$  (Eq. III.34) qui agit sur le grain  $n$ . Par analogie avec le dispositif unidimensionnel, on appelle  $F_0$  la force moyenne qui s'exerce le long d'une chaîne de force. En pratique, on a :  $\langle F_n \rangle = F_0$ .

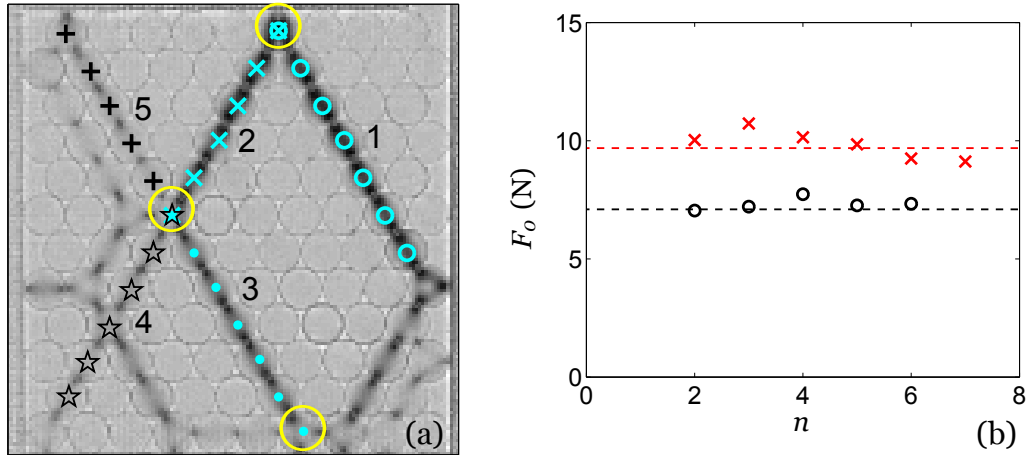
Il est important de noter que cette calibration n'est valable que pour des grains soumis à deux forces d'intensité égales et diamétralement opposées. Dans un empilement bidimensionnel, certains grains sont soumis à plus que deux forces et par conséquent cette méthode n'est plus correcte. Ces grains, dont le contour a été matérialisé par un cercle sur la figure VI.4.a, ne sont pas pris en compte pour déterminer la force moyenne qui s'exerce sur la chaîne dont

---

2.  $F_0$  est la force moyenne associée à une chaîne de force. Elle ne doit pas être confondue avec  $F_{\text{tot}}$  la force totale qui s'exerce sur le milieu.

3. Par analogie avec le chapitre IV, nous appelons  $c_s$  la vitesse des ondes en régime linéaire qui se propagent à 2D le long d'une chaîne de force.

---



**FIG. VI.4** – (a) : Repérage de cinq chaînes de forces pour cet empilement soumis à une force statique de  $F_{\text{tot}} = 28\text{ N}$ . Chaque chaîne est composée typiquement de 6 – 7 grains. Pour chacune de ces chaînes, nous mesurons la force moyenne  $F_0$  qui s’y exerce à l’aide de la méthode de calibration développée au § III.5. Cette méthode n’est valable que pour des grains soumis à deux forces diamétralement opposées. Les grains dont le contour ont été matérialisés par un cercle gras ne sont pas pris en compte pour la mesure de  $F_0$  car ils ne respectent pas cette hypothèse. (b) : Détermination de la force moyenne  $\langle F_n \rangle = F_0$  agissant sur une chaîne de force. Ligne 1 :  $F_0 = 10\text{ N}$  ( $\times$ ) et ligne 3 :  $F_0 = 7\text{ N}$  ( $\circ$ ).

ils font partie. La Fig. VI.4.b illustre la mesure de la force  $F_n$  le long des lignes numérotées 1 et 3. On voit que le grain  $n = 1$  n’a pas été pris en compte pour mesurer  $F_0$  sur les lignes 1 et 3, de même que le grain  $n = 7$  pour la ligne 3.

### VI.2.2.2 Suivi de l’onde

Nous mesurons la vitesse des ondes par la méthode du *temps de vol*. Il nous faut pour cela suivre un point particulier de l’onde et déterminer la distance parcourue par ce point en fonction du temps. Ici, nous ne pouvons pas forcément procéder de la même manière que pour les expériences à 1D où nous suivions le passage de l’onde par la variation d’intensité provoquée par cette dernière juste au centre du grain. Effectivement, si un grain est soumis à plus que deux forces opposées, l’intensité mesurée au centre du grain  $I_{\text{centre}}$  ne suffit plus pour caractériser la force résultante. Par exemple, un maximum de l’intensité transmise ne correspond plus nécessairement à un maximum de force. De même, la méthode de traitement mise au point au Chap. V ne convient pas non plus. En effet elle nécessite de mesurer

l'intensité suivant un axe perpendiculaire à la direction de propagation. A 2D, il est difficile et fastidieux de déterminer cette direction perpendiculaire à la direction de propagation pour tous les grains et pour tous les contacts. On a donc préféré utiliser une autre méthode pour suivre le passage de l'onde dans un grain.

On a donc employé une méthode alternative pour suivre la propagation de l'onde, inspirée de celle de Behringer *et coll.* [39, 40]. Celle-ci ressemble à celle mise au point au Chap. V, sauf qu'ici on analyse tous les pixels du grain et non pas juste ceux suivant un axe perpendiculaire à la propagation. L'idée de cette méthode est que le nombre de franges à l'intérieur du grain augmente de façon monotone avec la force totale qui s'y exerce. Autrement dit, pour un maximum de force, on aura un maximum de franges et donc un grand nombre de passages entre des franges blanches et des franges noires. On utilise cette propriété pour définir une nouvelle variable  $G_n^2(t)$  : le gradient au carré de l'intensité transmise par tous les pixels du grain  $n$ .

Pour obtenir  $G_n^2(t)$ , on calcule d'abord, pour chaque grain, la quantité notée  $g_{ij}^2$  par la formule :

$$g_{ij}^2 = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{J_{i-1,j} - J_{i+1,j}}{2} \right)^2 + \left( \frac{J_{i,j-1} - J_{i,j+1}}{2} \right)^2 + \left( \frac{J_{i-1,j-1} - J_{i+1,j+1}}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{J_{i-1,j+1} - J_{i+1,j-1}}{2\sqrt{2}} \right)^2 \right]$$

où  $J_{i,j}$  représente l'intensité transmise par le pixel  $(i,j)$  et normalisée par l'image de référence<sup>4</sup>. Les pixels  $(i,j)$  appartiennent au carré dont les côtés sont tangents au contour du grain  $n$  (Fig. VI.5).

$g_{ij}^2$  correspond au gradient spatial de l'intensité lumineuse transmise par le pixel  $(i,j)$  et calculé avec ses plus proches voisins. Plus cette valeur est grande, plus les variations spatiales de l'intensité lumineuse sont grandes. Cela signifie que les franges sont serrées et par conséquent que la contrainte est grande (Fig. VI.5).

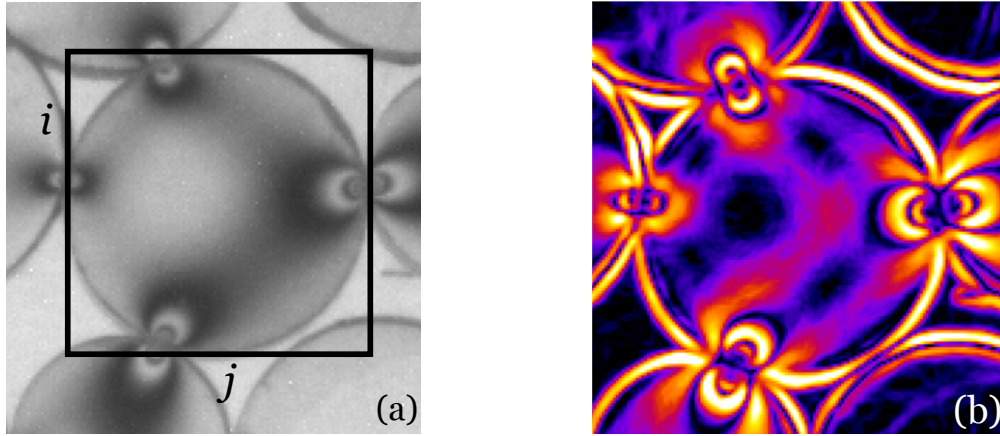
On calcule  $g_{ij}^2$  pour les  $N$  images du film et pour tous les grains des chaînes de forces sélectionnées. Ensuite, on calcule la moyenne spatiale du gradient au carré :

$$G_n^2(t) = \frac{1}{M} \sum_{i,j} g_{ij}^2(t) \quad (\text{VI.1})$$

---

4. Par la suite, on réserve la notation  $I$  pour désigner l'intensité transmise par le centre du grain et normalisée par l'image de référence.  $J$  est l'intensité normalisée transmise par tous les pixels du grain. Autrement dit,  $J_{\text{centre}} = I$

---



**FIG. VI.5** – (a) : Pour chaque grain d'une chaîne de force, on définit le carré dont les côtés sont tangents aux contours du grain. Pour tous les pixels  $(i, j)$  du carré, on calcule la quantité  $g_{ij}^2$ . (b) : Image en fausses couleurs représentant la quantité  $g_{ij}^2$ . Les zones noires correspondent à des zones où le gradient est nulle et les zones jaunes à des endroits où le gradient est très important. Il suffit ensuite de calculer la moyenne de  $g_{ij}^2$  sur tout le carré pour obtenir  $G_n^2$ .

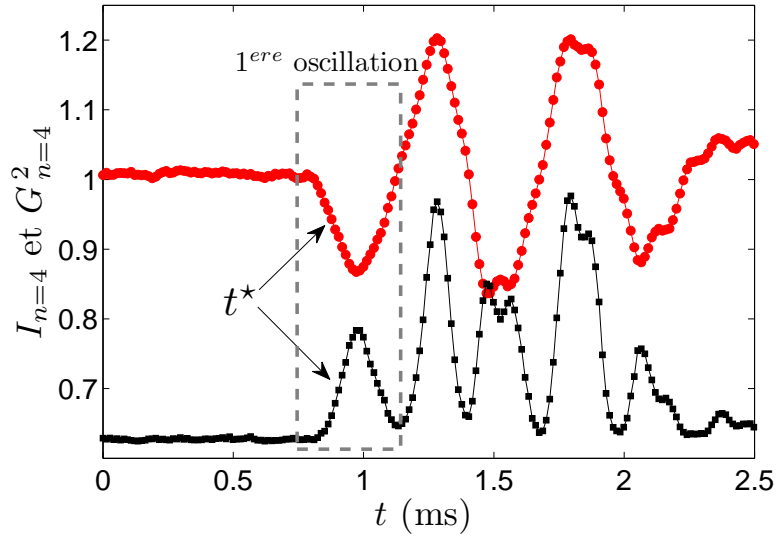
où  $M$  est le nombre de pixels dans le carré.

On obtient ainsi une quantité  $G_n^2(t)$  pour tous les grains  $n$  d'une chaîne sélectionnée et pour tous les temps. Par construction, les maxima de  $G_n^2(t)$  doivent correspondre à des extrema de la force appliquée au grain. C'est ce que nous avons vérifié pour le grain  $n = 4$  appartenant à la ligne 1 de la Fig. VI.4. Ce grain est soumis uniquement à deux forces diamétralement opposées de valeur  $F_0 = 10$  N de sorte que dans ce cas, on est sûr que les extrema de l'intensité<sup>5</sup> mesurée au centre, soit  $I_{n=4}$ , correspondent à des extrema de la force. Nous voulons vérifier sur cet exemple que les extrema de  $G_{n=4}^2$  correspondent aux extrema de  $I_{n=4}$  et par conséquent aux extrema de la force. Les mesures de  $I_{n=4}$  et  $G_{n=4}^2$  lors du passage de l'onde sont représentés Fig. VI.6.

La courbe  $G_{n=4}^2$  a été décalé verticalement pour une meilleure visibilité. Avant que l'onde n'arrive, les deux signaux prennent des valeurs constantes : 1 pour  $I_{n=4}$  et 0 pour  $G_{n=4}^2$ . Puis  $I_{n=4}(t)$  oscille avec une période d'environ 0.5 ms soit une fréquence de 2 kHz, ce qui correspond à la fréquence de l'excitation. La fonction  $G_{n=4}^2(t)$  présente aussi des oscillations, avec une fréquence d'environ 1 kHz, dont les maxima coïncident bien avec les extrema de  $I_{n=4}(t)$ . Sur cet exemple, on a vérifié que la variable  $G_n^2(t)$  permettait de suivre la propagation du pulse et qu'un maximum coïncide avec un extremum de la force qui agit sur le grain. On

---

5. Je précise de nouveau qu'il s'agit de l'intensité mesurée au centre divisée par celle mesurée sur l'image de référence à  $t = 0$ .



**FIG. VI.6** – Allure des fonctions  $I_{n=4}$  (courbe du haut) et  $G_{n=4}^2$  (courbe du bas) pour le grain  $n = 4$  de la ligne 1 de la Fig. VI.4. La courbe  $G_{n=4}^2(t)$  a été décalée pour une meilleure comparaison. Les deux signaux présentent des oscillations qui coïncident parfaitement : un maximum du signal  $G_{n=4}^2(t)$  correspond à un extremum de  $I_{n=4}(t)$ . Le signal  $G_n^2(t)$  offre donc une alternative pour suivre la propagation de l'onde pour des grains pour lesquels la mesure de  $I_n(t)$  n'est pas valable. Pour mesurer la vitesse, on suit le point à mi-hauteur de la première oscillation (dans le cadre en pointillés).

peut donc désormais mesurer la vitesse de l'onde acoustique en suivant un point particulier de  $I_n(t)$  et/ou de  $G_n^2(t)$ . Je rappelle que pour les grains ayant plusieurs contacts qui ne sont pas diamétralement opposés, seule la deuxième méthode convient. Pour les autres, les deux méthodes seront utilisées et comparées.

## VI.3 Vitesse des ondes dans un empilement bidimensionnel

### VI.3.1 Détermination de la vitesse et incertitudes

On souhaite mesurer la vitesse  $c_s$  des ondes acoustiques le long des chaînes de force par la méthode du *temps de vol*. Il faut pour cela suivre un point particulier de l'onde. Nous avons opté pour suivre le point à mi-hauteur de la première oscillation de l'onde. Cela revient à déterminer pour chaque grain  $n$  d'une chaîne de force le temps  $t^*$  pour lequel le signal vaut la

moitié du premier extremum (Fig. VI.6). On a choisi ce point car la pente  $y$  est importante ce qui diminue les erreurs de mesure. De plus, comme ce point correspond au début du signal, on est sûr de mesurer la vitesse de l'onde qui s'est propagée le long de la chaîne sélectionnée et qu'il n'y a pas eu d'interférences avec des ondes qui sont passées par d'autres chemins (cet effet est discuté dans [113]).

La figure VI.7 montre la propagation de l'onde dans un empilement 2D avec un arrangement hexagonal et la mesure des signaux  $I_n(t)$  et  $G_n^2(t)$  pour les grains  $n = 1, 4, 7$  de la chaîne de force 1. On observe bien un décalage temporel entre les trois grains correspondant au temps de propagation. On détermine la distance parcourue par le point à mi-hauteur de la première bosse en fonction du temps. Les résultats sont reportés Fig. VI.8. Les points s'alignent sur une droite dont la pente renseigne sur la vitesse  $c_s$  des ondes. On mesure  $c_s = 500$  m/s pour les points déduits du signal  $I_n(t)$  et  $c_s = 537$  m/s pour ceux déduits du signal  $G_n^2(t)$ . L'écart entre ces deux méthodes est, dans cet exemple, de l'ordre de 7%.

Nous avons aussi enregistré les signaux de deux pulses acoustiques consécutifs sans rien toucher au système afin de tester la reproductibilité des mesures et la robustesse de notre traitement d'images. La figure VI.9.a montre l'allure de la fonction  $I_n(t)$  pour les grains  $n = 1$  et  $n = 6$  pour deux expériences immédiatement successives. Les deux séries de courbes se superposent parfaitement, ce qui indique que les propriétés de l'onde et notamment la vitesse  $c_s$  sont tout à fait similaires et reproductibles. Cependant, la courbe de la Fig. VI.9.b indique des vitesses de 526 m/s et 488 m/s, soit un écart de l'ordre de 7%. Mais comme les courbes se superposent parfaitement, cette différence ne peut être attribuée qu'au bruit de la mesure et au protocole pour déterminer  $t^*$ . En effet puisque les chaînes sont composées d'un très petit nombre de grains<sup>6</sup>, les temps de vol sont très petits, ce qui rend la mesure de vitesse délicate. Toutefois, on constate que nos mesures sont reproductibles à moins de 8%.

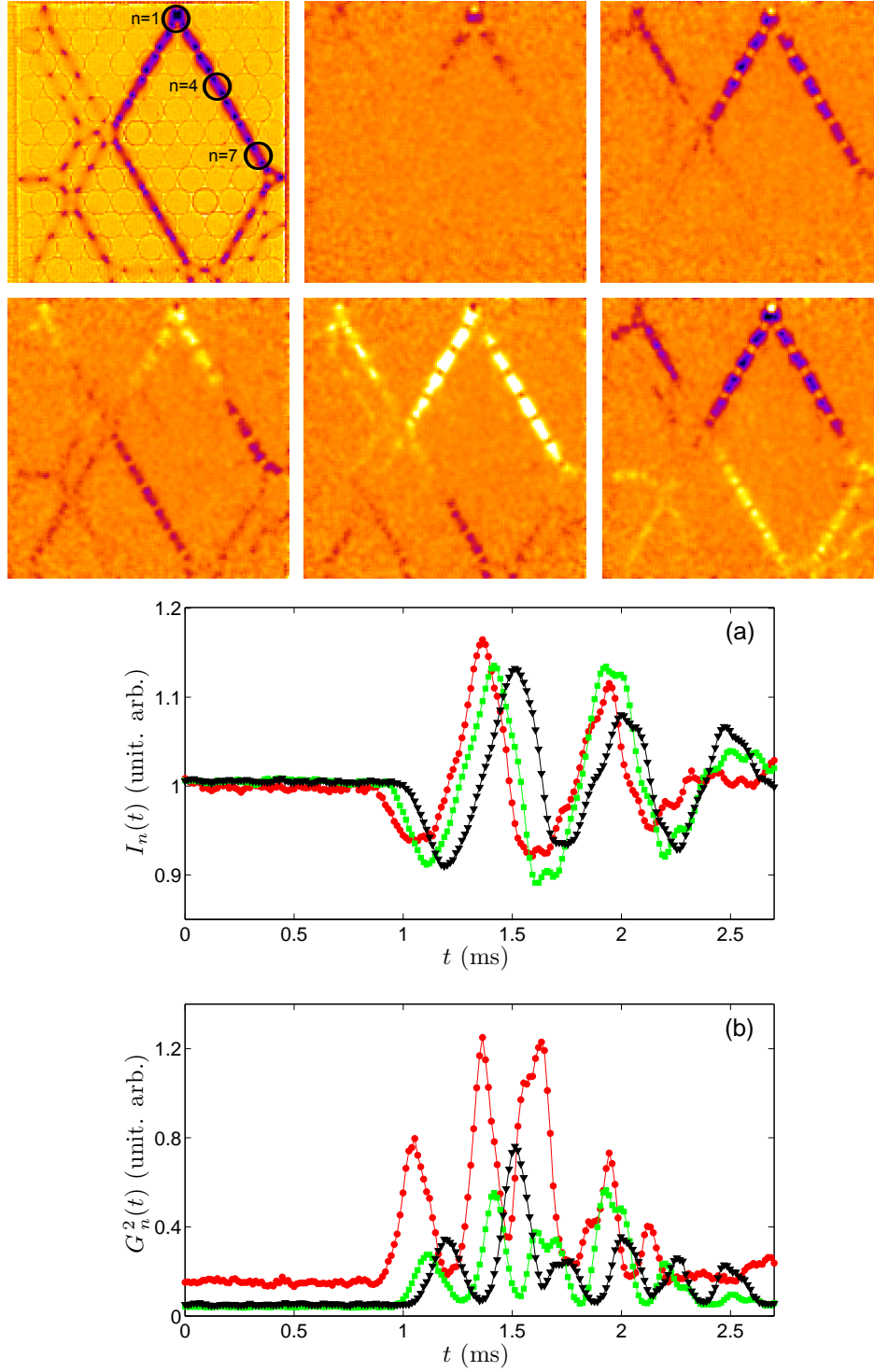
L'écart entre les vitesses obtenues précédemment par les deux méthodes ( $I_n(t)$  et  $G_n^2(t)$ ) est lui aussi lié au traitement d'images. Dans la suite, lorsqu'on disposera des vitesses obtenues par les deux signaux ( $I_n(t)$  et  $G_n^2(t)$ ) pour une même chaîne de force, on moyennera les résultats.

---

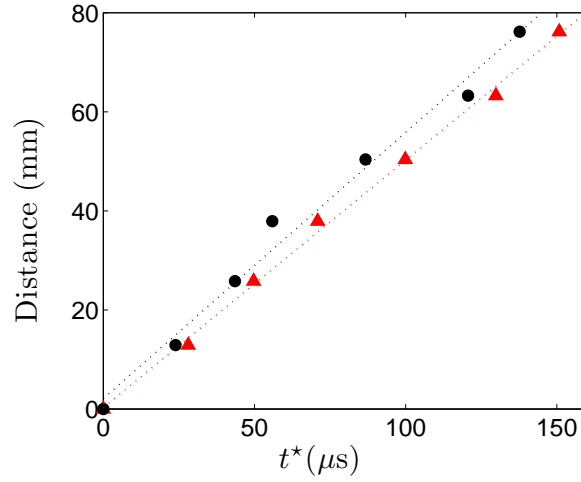
6. Typiquement, les chaînes de force sélectionnées ici sont 5 fois plus petites que la chaîne 1D des chapitres IV et V.

---

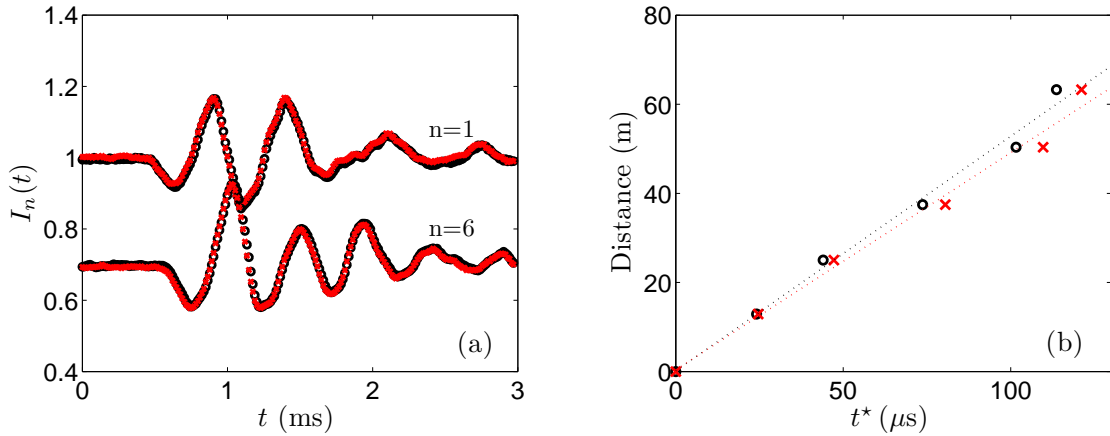




**FIG. VI.7** – *Propagation des ondes sonores le long des chaînes de forces dans un empilement bidimensionnel avec un arrangement hexagonal. Les images sont toutes séparées de  $175\mu s$ . Allure du signal  $I_n$  (a) et  $G_n^2$  (b) pour les grains  $n = 1$  (●),  $n = 4$  (□) et  $n = 7$  (▽). On voit que les différentes courbes sont décalées. Ce décalage donne le temps de propagation de l'onde. Pour mesurer la vitesse de propagation, on suit le point à mi-hauteur de la première oscillation.*



**FIG. VI.8** – Distance parcourue par le point à mi-hauteur de la première bosse pour le signal  $I_n(t)$  ( $\blacktriangle$ ) et  $G_n^2(t)$  ( $\bullet$ ) en fonction du temps. La pente de cette droite donne la vitesse  $c_s$  de propagation. On trouve  $c_s = 500$  m/s ( $\blacktriangle$ ) et  $c_s = 537$  m/s ( $\bullet$ ).



**FIG. VI.9** – (a) : Allure des courbes  $I_n(t)$  pour les grains  $n = 1$  et  $n = 6$  pour deux expériences successives avec exactement le même empilement. On constate que les courbes se superposent parfaitement, ce qui indique que la vitesse de propagation est une grandeur reproductible. (b) : Distance parcourue par l'onde pour les deux expériences successives faites sur le même empilement. On remarque une différence dans la mesure de vitesse de l'ordre de 7%. Puisque que les courbes  $I_n(t)$  se superposent parfaitement, cette différence n'a pas d'origine physique mais est liée au bruit et surtout au traitement d'images pour déterminer  $t^*$ .

### VI.3.2 Résultats pour un empilement avec un arrangement hexagonal

Dans ce paragraphe, je présente les résultats obtenus pour la mesure de vitesse  $c_s$  des ondes acoustiques dans un empilement bidimensionnel avec un arrangement hexagonal. Pour chaque chargement  $F_{\text{tot}}$ , on mesure la vitesse sur les différentes lignes de forces. Ensuite on change  $F_{\text{tot}}$ , ce qui modifie la valeur de la force dans les chaînes de forces sélectionnées et on recommence les mesures de vitesses.

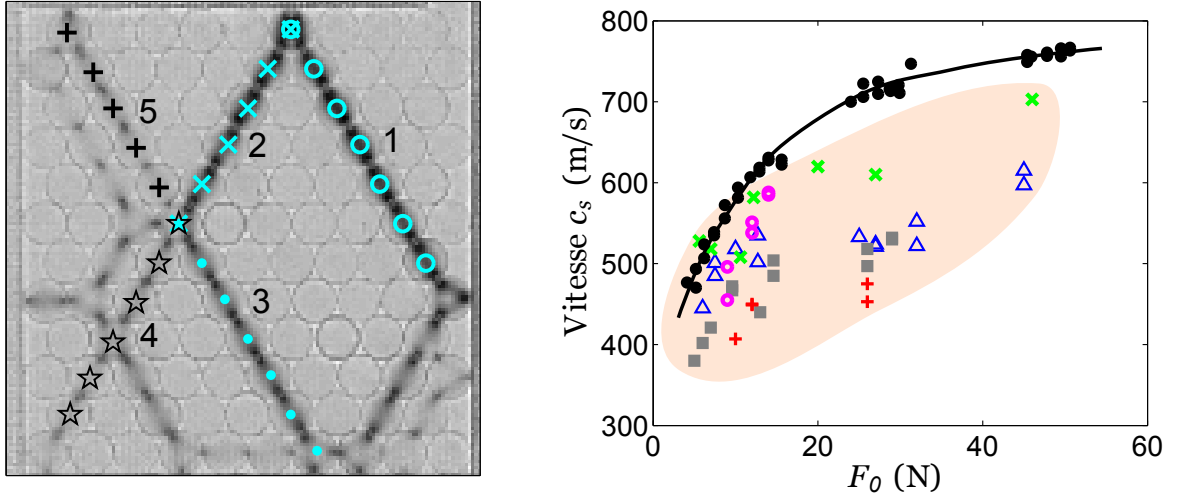
Les résultats sont présentés Fig. VI.10 pour les cinq chaînes de forces correspondant à l'empilement de la Fig. VI.4 et qu'on a de nouveau rappelé ici. On observe que pour chacune des chaînes de force, la vitesse  $c_s$  croît lorsque la force moyenne  $F_0$  s'y exerçant augmente. Par contre pour une même force  $F_0$ , il y a des disparités importantes entre les différentes chaînes de force. Cette dispersion des mesures semble être plus importante que l'incertitude de l'ordre de 10% évoquée au paragraphe précédent sur la mesure des vitesses. Il semblerait donc qu'il ne suffise pas de connaître la force  $F_0$  d'une chaîne de force pour caractériser la vitesse de propagation de l'onde. On remarque également que toutes les vitesses mesurées sont inférieures à celles mesurées dans le cas d'une chaîne unidimensionnelle à la même force  $F_0$ . Ce phénomène ne peut pas être uniquement imputé au bruit des signaux car sinon on s'attendrait à avoir des points au-dessus et en-dessous de la courbe à 1D, ce qui n'est pas le cas.

Nous avons réitéré ces mesures pour deux autres empilements différents mais toujours avec un arrangement hexagonal. L'ordre géométrique reste le même mais la position des grains, des contacts actifs et des chaînes de force sont différentes. Les résultats sont reportés Fig. VI.11. Pour un de ces empilements, nous avons réalisé des films plus rapides ( $10^5$  images/s mais avec une résolution de  $80 \times 120$  pixels) pour gagner en précision sur la détermination de  $t^*$ ; cela ne change pas la valeur de  $c_s$  mesurée. On peut en conclure que l'écart entre ces mesures et celles à 1D n'est pas due à un problème de traitement d'images. On discutera ce point au § VI.4.

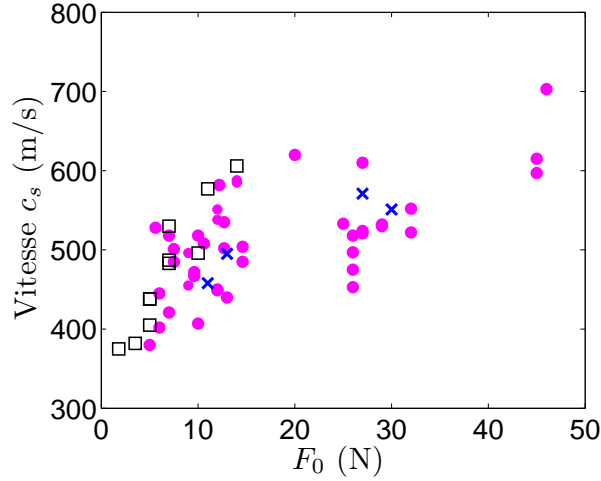
### VI.3.3 Résultats pour un empilement avec un arrangement carré

Dans ce paragraphe, je présente les résultats concernant la propagation d'ondes sonores dans des empilements bidimensionnels avec un arrangement carré. La Fig. VI.12 montre

---

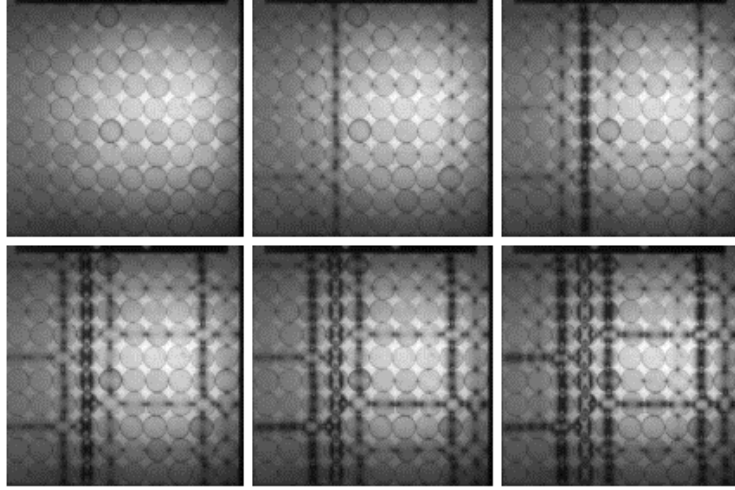


**FIG. VI.10** – Evolution de la vitesse  $c_s$  des ondes sonores en régime linéaire dans un empilement bidimensionnel avec un arrangement hexagonal. Les mesures de vitesse sont faites le long des cinq chaînes de forces : ligne 1 ( $\triangle$ ) ; ligne 2 ( $\times$ ) ; ligne 3 ( $\square$ ) ; ligne 4 ( $+$ ) ; ligne 5 ( $\circ$ ). Pour comparaison, on a fait figurer la vitesse obtenue pour la chaîne 1D en régime linéaire ( $\bullet$ ).



**FIG. VI.11** – Evolution de la vitesse  $c_s$  des ondes acoustiques pour trois empilements différents tous avec un motif hexagonal. Les mesures faites pour différentes chaînes de forces mais appartenant à un même empilement ont été regroupées sous un même symbole. Le symbole ( $\bullet$ ) correspond aux mesures faites sur les cinq chaînes de forces de la Fig. VI.10. Le symbole ( $\times$ ) représentent les mesures faites à  $10^5$  images/s.

un tel empilement soumis à différentes forces  $F_{\text{tot}}$  de compression uniaxiale. On observe que la force extérieure se répartit suivant des *chaînes de forces* rectilignes et verticales.

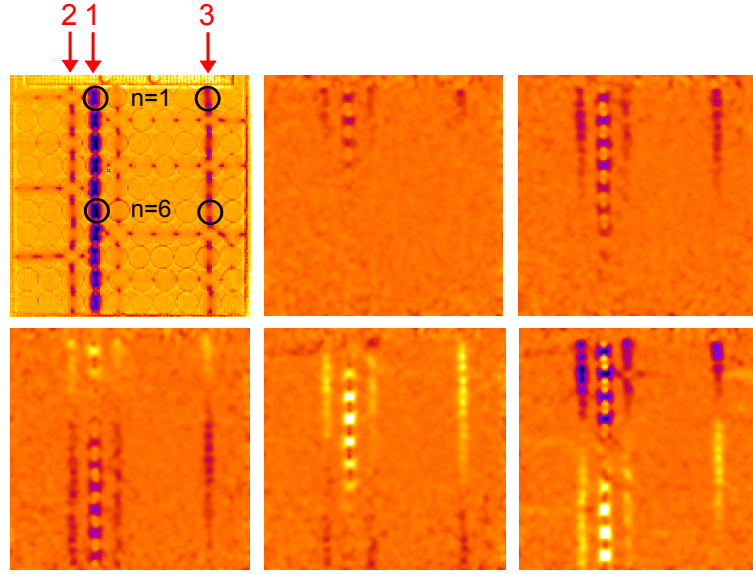


**FIG. VI.12** – Exemples d'un empilement bidimensionnel de cylindres avec un arrangement carré soumis à une force de compression croissante  $F_{\text{tot}} = 0, 15, 38, 60, 80, 110$  N (de gauche à droite et de haut en bas). La force extérieure se répartit suivant des chaînes de forces rectilignes.

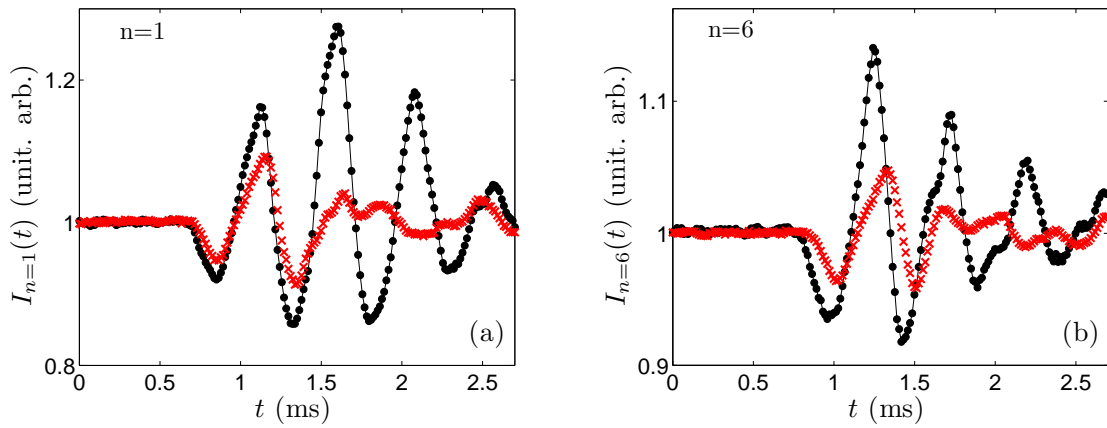
Lorsque  $F_{\text{tot}}$  augmente, de nouveaux contacts apparaissent ce qui permet de former des chaînes horizontales reliant celles verticales. L'activation des nouveaux contacts est due aux flambages des chaînes de forces ou aux déformations élastiques des grains dans la direction perpendiculaire à l'axe de compression.

La Fig. VI.13 représente la propagation de l'onde dans l'empilement. L'image en haut à gauche correspond à l'empilement dans son état initial soumis à  $F_{\text{tot}} = 38$  N ; les cinq autres images sont séparées de  $135 \mu\text{s}$  entre elles et ont été divisées par l'image de référence. De même que pour la géométrie hexagonale, on observe que les ondes empruntent les chaînes de forces initiales. Sur la troisième image, on visualise que l'onde se propage à des vitesses différentes suivant les différentes chaînes de forces. Cela se voit aussi figure VI.14 où l'on a tracé  $I_{n=1}(t)$  et  $I_{n=6}(t)$  pour les grains  $n = 1$  et  $n = 6$  des chaînes 1 et 3. Les ondes sont émises en même temps au grain  $n = 1$  mais arrivent au grain  $n = 6$  avec un décalage temporel. On mesure  $c_s = 484$  m/s pour la ligne 1 soumise à  $F_0 = 12$  N et  $c_s = 374$  m/s pour la ligne 3 soumise à  $F_0 = 6$  N.

Les mesures de vitesse  $c_s$  pour les trois chaînes de force de cet empilement sont reportées Fig. VI.15.a. Pour les trois chaînes de force, on constate que la vitesse de propagation augmente lorsque  $F_0$  croît. En revanche, les valeurs sont assez dispersées entre les différentes chaînes. Là encore, les mesures sont toujours inférieures à celles trouvées pour la chaîne 1D. On a réitéré ces mesures pour un autre empilement toujours avec un motif carré. Les résultats

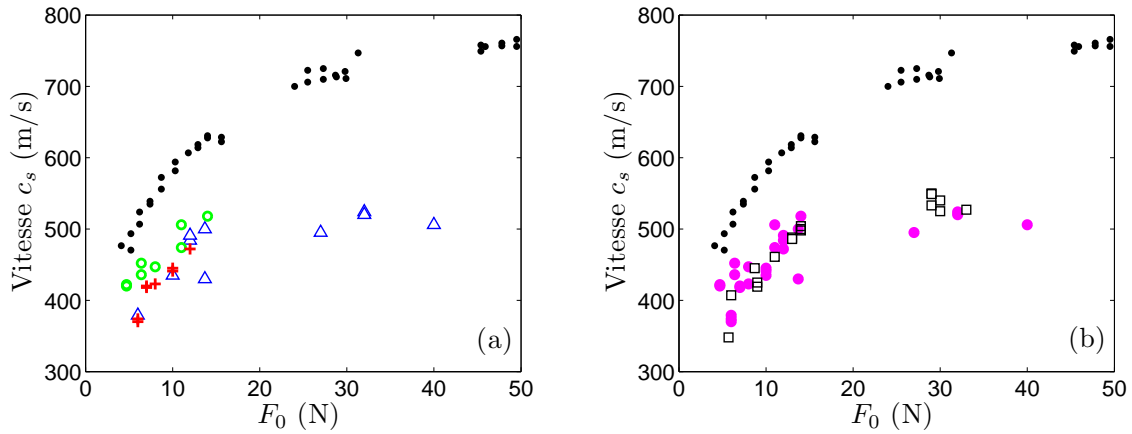


**FIG. VI.13** – Propagation des ondes sonores en régime linéaire dans un empilement bidimensionnel avec un arrangement carré. L'image en haut à gauche montre le système dans son état initial soumis à une force statique  $F_{\text{tot}} = 38 \text{ N}$ . Les cinq autres images illustrent la propagation de l'excitation : chaque image est séparée de  $135 \mu\text{s}$  et a été divisée par la première image. On voit clairement que l'onde se propage suivant les lignes verticales que forment les chaînes de force. Cela permet de définir les trois lignes 1, 2 et 3 suivant lesquelles on mesurera la vitesse de propagation  $c_s$ .



**FIG. VI.14** – Propagation des ondes acoustiques suivant les lignes 1 (●) et 3 (×) pour les grains  $n = 1$  (a) et  $n = 6$  (b). Le premier minimum est émis simultanément pour les grains  $n = 1$  des deux chaînes, par contre on constate un décalage temporel pour l'arrivée du minimum au grain  $n = 6$ . Cela confirme que les vitesses sont différentes dans ces deux chaînes de forces.

sont présentés Fig. VI.15.b.



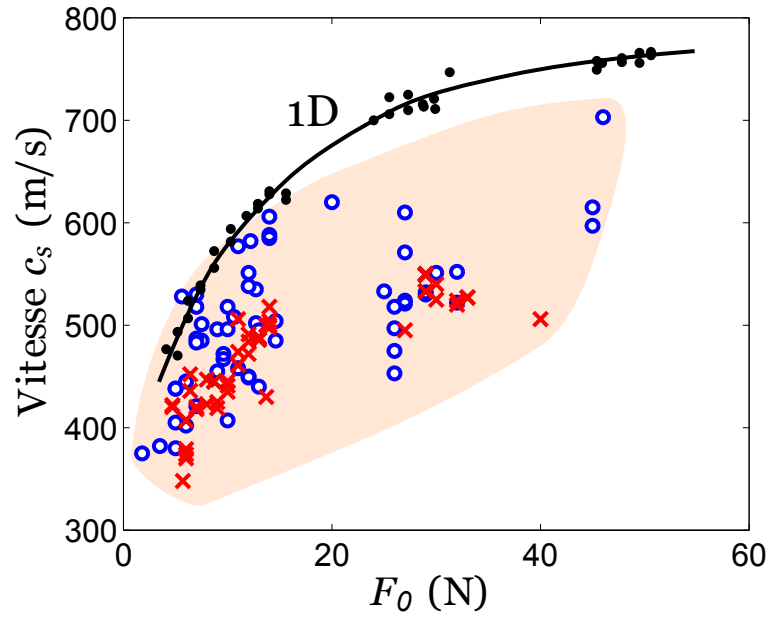
**FIG. VI.15** – (a) : Evolution de la vitesse  $c_s$  avec  $F_0$  le long des chaînes de force de la Fig. VI.13 : ligne 1 ( $\Delta$ ) ; ligne 2 ( $\circ$ ) ; ligne 3 (+). (b) : Evolution de la vitesse  $c_s$  pour deux empilements carrés différents. Les résultats des différentes chaînes d'un même empilement ont été regroupés sous un même symbole. On a fait figurer les mesures de vitesse pour la chaîne 1D ( $\bullet$ ).

## VI.4 Résumé et discussion

Nous reportons sur la Fig. VI.16 toutes les mesures de vitesse  $c_s$  des ondes sonores en régime linéaire en fonction de la force  $F_0$  qui agit sur une chaîne de force pour les deux types d'empilements ordonnés utilisés. Nous comparons ces résultats à la loi de vitesse  $\ll F_0 - V \gg$  obtenue pour la chaîne unidimensionnelle. Nous avons déjà mentionné que pour une chaîne de force donnée, la vitesse  $c_s$  augmente avec  $F_0$ . En revanche, en comparant différentes chaînes de forces pour un même  $F_0$ , on constate une dispersion des résultats supérieures aux incertitudes de notre mesure. On remarque également que les mesures faites le long d'une chaîne de force sont indépendantes de l'arrangement géométrique de l'empilement : les résultats sont similaires pour l'arrangement hexagonal et carré.

Enfin, nous allons comparer ces résultats obtenus à ceux concernant la chaîne unidimensionnelle obtenus au chapitre IV. Pour chaque force  $F_0$ , on trouve que les vitesses mesurées à 2D sont inférieures à celles mesurées à 1D. Cet écart ne peut pas être associé à un problème systématique de traitement d'images. En effet, des mesures effectuées avec une meilleure résolution temporelle de la caméra corroborent les autres résultats. De plus, s'il s'agissait d'un problème de mesures et de mauvaise détermination du temps de vol  $t^*$ , les points se répartiraient au-dessus et en-dessous de la courbe 1D, ce qui n'est pas le cas.

On en conclue que la vitesse des ondes mesurée le long d'une chaîne de force dans un



**FIG. VI.16** – Vitesse  $c_s$  des ondes sonores en régime linéaire en fonction de la force  $F_0$  qui agit sur une chaîne de force pour un empilement bidimensionnel avec un arrangement hexagonal ( $\circ$ ) et carré ( $\times$ ). Pour comparaison, on a fait figurer les mesures de vitesse pour la chaîne 1D en régime linéaire ( $\bullet$ ).

milieu 2D est systématiquement inférieure à celle obtenue dans une chaîne 1D soumise à une force statique  $F_0$  identique. Deux raisons peuvent être évoquées pour expliquer cet écart. Tout d'abord, une raison envisageable serait liée à l'empilement 2D lui-même. Les grains qui forment une chaîne suivant laquelle l'onde se propage sont en contact avec des grains voisins extérieurs à la chaîne. Ce couplage pourrait avoir comme incidence d'augmenter l'inertie du grain à mettre en mouvement. De ce fait, le grain serait alors modélisé par une masse non plus de masse  $M$  mais de masse  $M_{eff} > M$  qui tienne compte de ce couplage avec les grains voisins et extérieurs à la chaîne. On comprend alors que l'onde se propage moins vite. Ce phénomène est bien sûr inexistant à 1D puisqu'il n'y a pas de voisins extérieurs à la chaîne où se fait la propagation. Les résultats de la chaîne 1D ne seraient donc pas transposables à 2D. Cette interprétation permet d'expliquer pourquoi l'écart entre les valeurs de vitesses est d'autant plus important que la force est grande. En effet, lorsque celle-ci augmente, le couplage des grains avec leurs voisins est favorisé, ce qui augmente davantage la masse effective  $M_{eff}$ . Lorsque la force  $F_0$  augmente, la raideur  $\kappa$  d'un contact croît, ce qui a pour conséquence d'augmenter la vitesse  $c_s$  (exactement comme à 1D). Mais parallèlement le couplage avec les voisins est plus important ce qui entraîne une augmentation de  $M_{eff}$  et donc une diminution de  $c_s$  en comparaison au cas 1D.



L'autre raison peut venir de la taille des chaînes le long desquelles on mesure le temps de vol. En effet, la chaîne étudiée à 1D était constituée de 36 grains contre uniquement 6 – 7 grains pour les chaînes à 2D. Peut-être existe-t-il un régime transitoire, long de quelques grains, pour que l'onde prenne sa forme définitive et atteigne un régime stationnaire où la vitesse  $c_s$  est uniquement fonction de  $F_0$ . Si tel est le cas, et comme les chaînes à 2D sont longues de juste quelques grains, c'est justement ce régime transitoire que l'on mesurerait. En revanche à 1D, puisqu'on filme à partir du quatrième grain, nous n'avons pas vu ce régime transitoire. Pour éclaircir ce point, il faudrait disposer de chaînes de forces plus longues pour le système 2D et donc avoir un système expérimental plus grand. Un système quatre fois plus grand<sup>7</sup> est en cours de réalisation et sera l'objet d'une étude ultérieure.

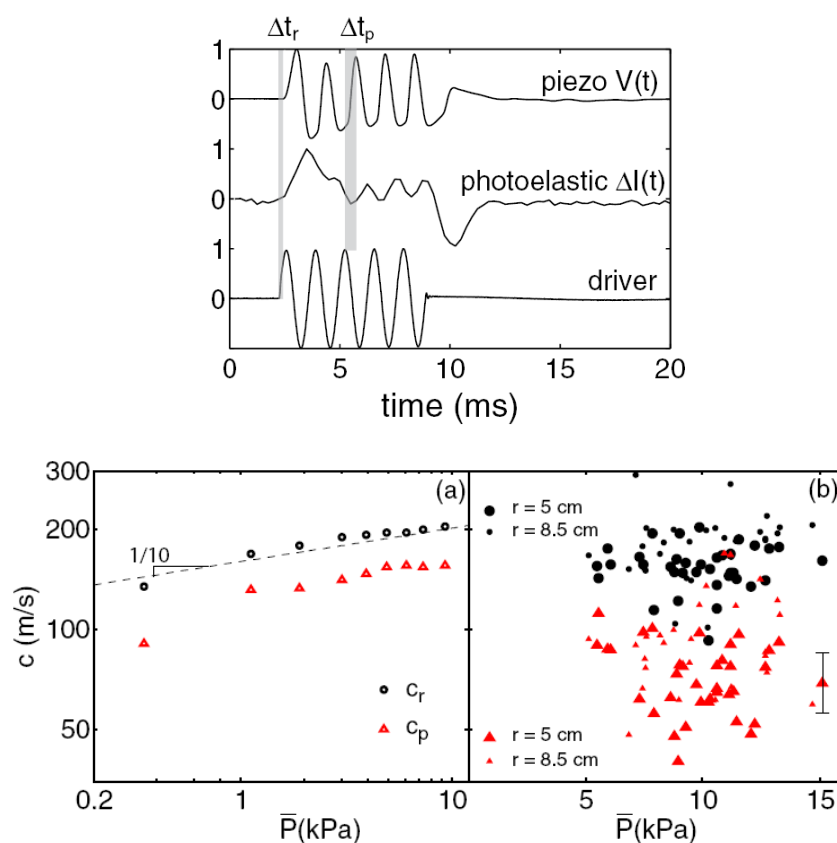
Des résultats analogues ont été rapportés très récemment mais sans être discutées. En effet, simultanément à notre étude, Daniels *et coll.* [113] ont procédé à un travail similaire. Les auteurs utilisent un empilement de grains mous en polyuréthane dont on a déjà évoqué les propriétés/inconvénients. De plus, ils utilisent la photoélasticité pour visualiser le chemin emprunté par l'onde mais les mesures de temps de vol, et donc de vitesse, sont faits à l'aide de capteurs piézoélectriques introduits dans le système. Notre étude est donc novatrice dans le sens où toutes les observations (visualisation du chemin emprunté, mesures de la force locale et du temps de vol) sont déduites des signaux photoélastiques. On constate sur la Fig. VI.17 que les mesures de vitesse sont aussi très dispersées et légèrement inférieures en moyenne à celles du milieu 1D. Remarquons aussi que dans cette étude, la gamme de pression  $\bar{P}$  explorée est très limitée.

## VI.5 Perspectives

Une perspective à cette étude serait d'utiliser un dispositif (et donc un nombre de grains) plus grand. Cela permettrait d'obtenir des chaînes de force plus longues et de trancher entre les deux hypothèses que nous avons avancées pour expliquer l'écart entre les mesures à 1D et à 2D. Il serait également intéressant, et facilement envisageable avec notre méthode de calibration, d'étudier le lien entre l'amplitude de l'onde qui transite dans une chaîne de force et la force  $F_0$  qui s'y exerce. Nous aimerions aussi pouvoir réaliser des expériences avec des ondes de petite longueur d'onde et visualiser par photoélasticité le processus de diffusion régi par les hétérogénéités du milieu. Toutes ces expériences pourraient être réalisées dans

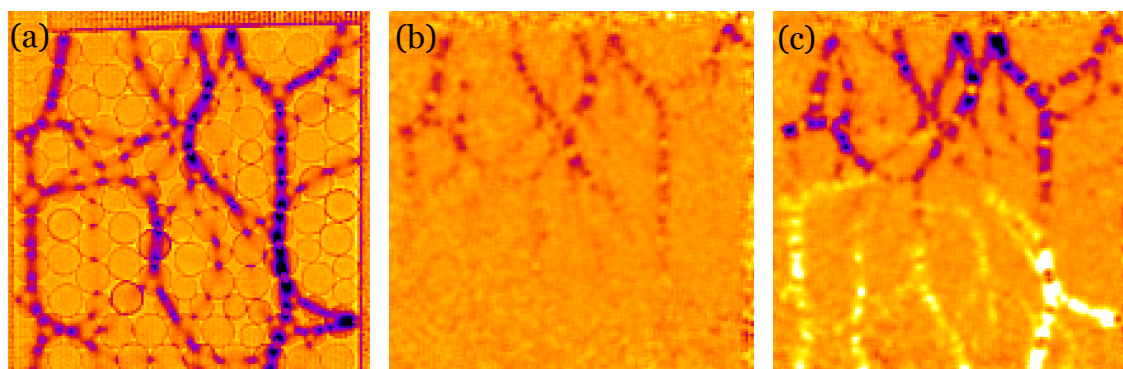
---

7. Avec quatre fois plus de grains, tous fait un à un à l'atelier mécanique du laboratoire.



**FIG. VI.17** – Tiré de [113]. Mesure de la vitesse des ondes acoustiques dans un milieu 1D (a) et 2D (b). Les intervalles  $\Delta t_r$  et  $\Delta t_p$  permettent d'estimer les deux vitesses  $c_r$  ( $\circ$ ) et  $c_p$  ( $\Delta$ ).

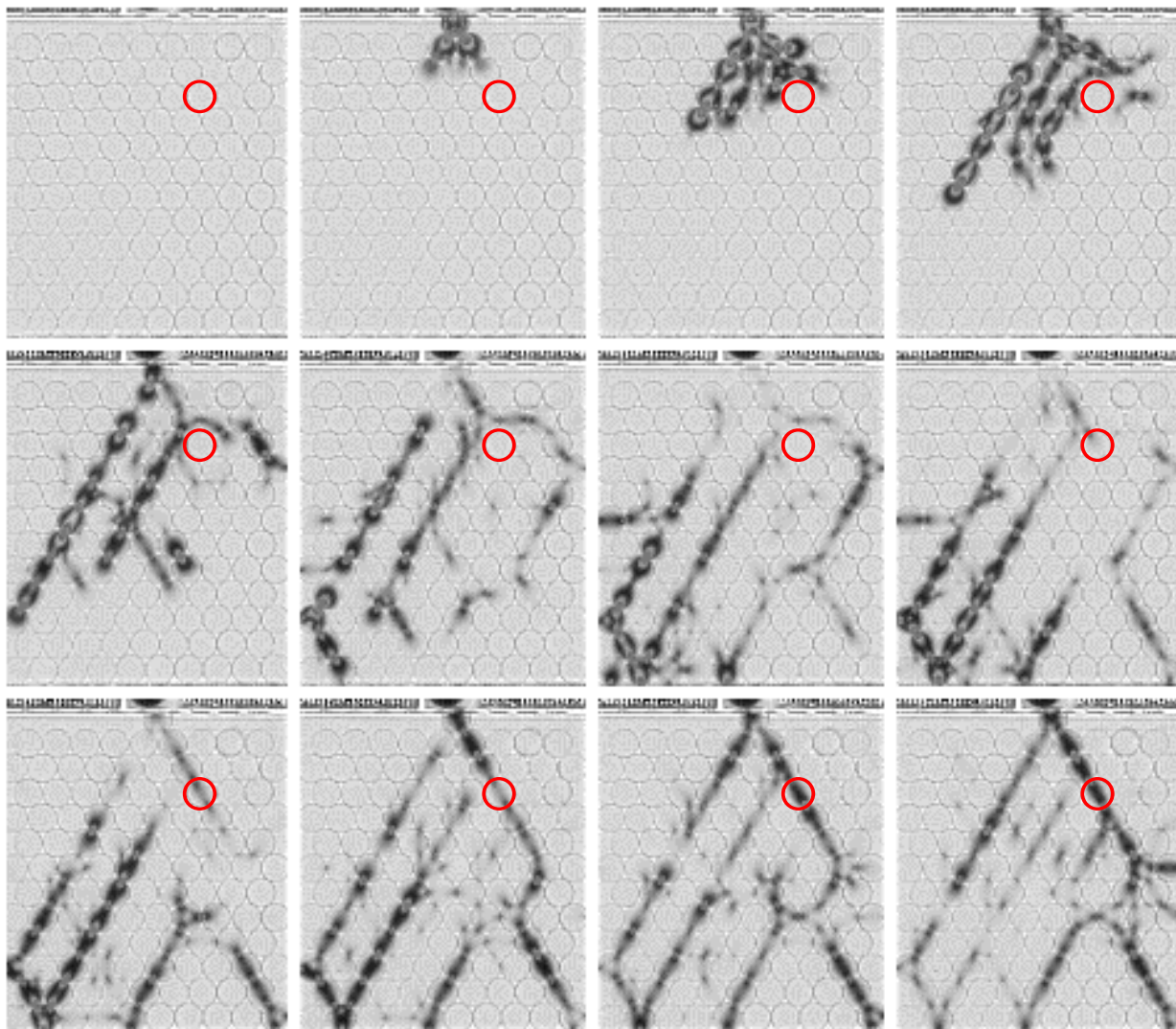
des empilements avec un arrangement ordonné (hexagonal et carré) et des empilements désordonnés (Fig. VI.18).



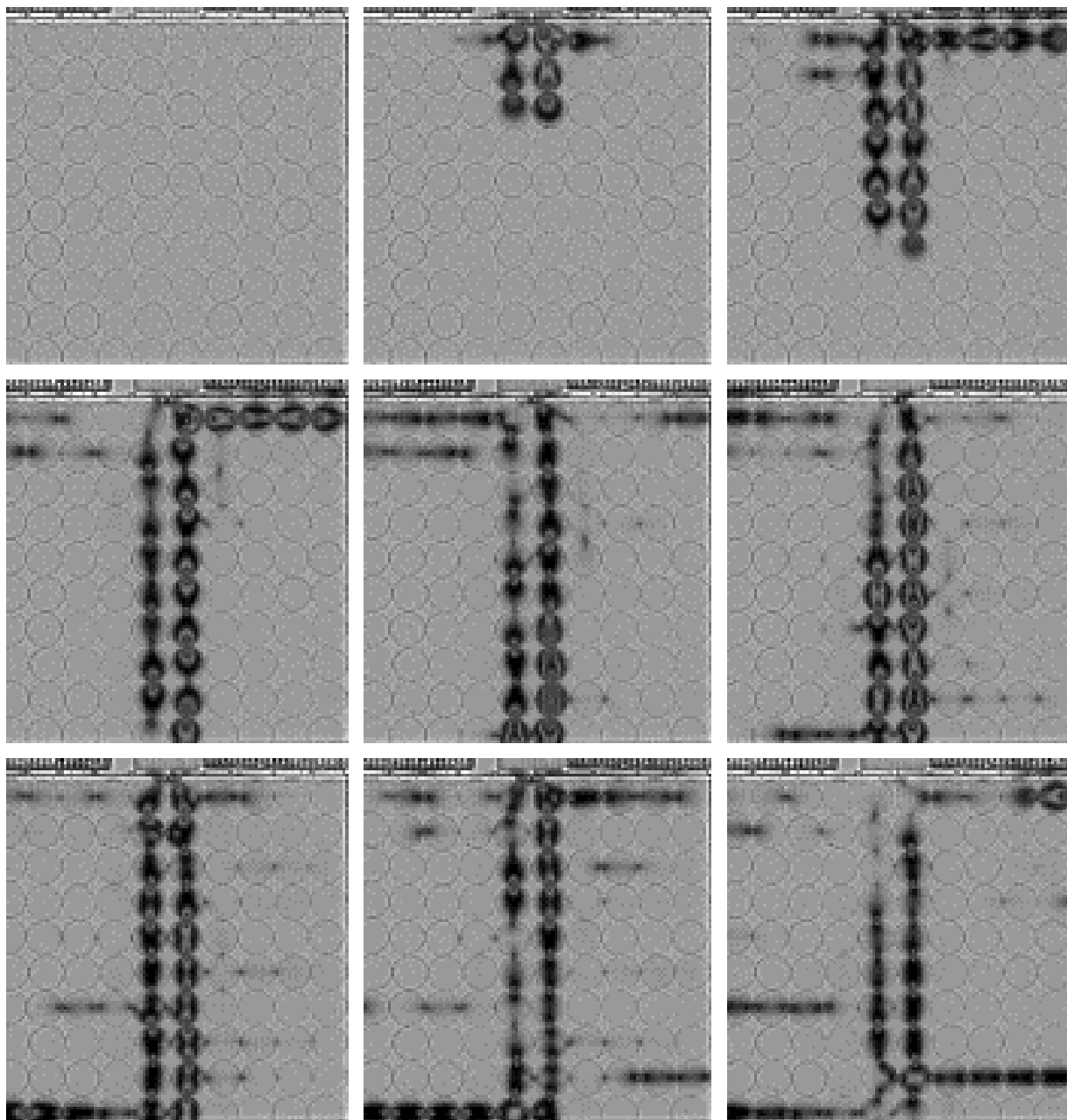
**FIG. VI.18** – Propagation d'une onde sonore en régime linéaire dans une empilement désordonné constitué de grains de diamètre 13 mm et 9.6 mm. (a) : Empilement dans son état initial soumis à  $F_{tot}$ . On visualise les chaînes de forces. (b, c) : Visualisation de la propagation de l'onde. Les deux images sont séparées de 500 μs et ont été divisées par l'image de référence.

Enfin, pour se rapprocher des expériences de Coste *et coll.* et Jia *et coll.* [55, 56, 93, 95], nous souhaiterions mesurer la vitesse de propagation des ondes cohérentes entre un point source et un point de réception en fonction de la compression uniaxiale  $F_{\text{tot}}$ . Parallèlement, nous serions capable de visualiser par photoélasticité les contacts actifs et l'évolution de leur nombre en fonction de  $F_{\text{tot}}$ . Ces deux mesures permettraient de mettre en évidence expérimentalement le lien possible entre l'activation des contacts et la déviation à la loi de Hertz observée expérimentalement pour les empilements de sphères.

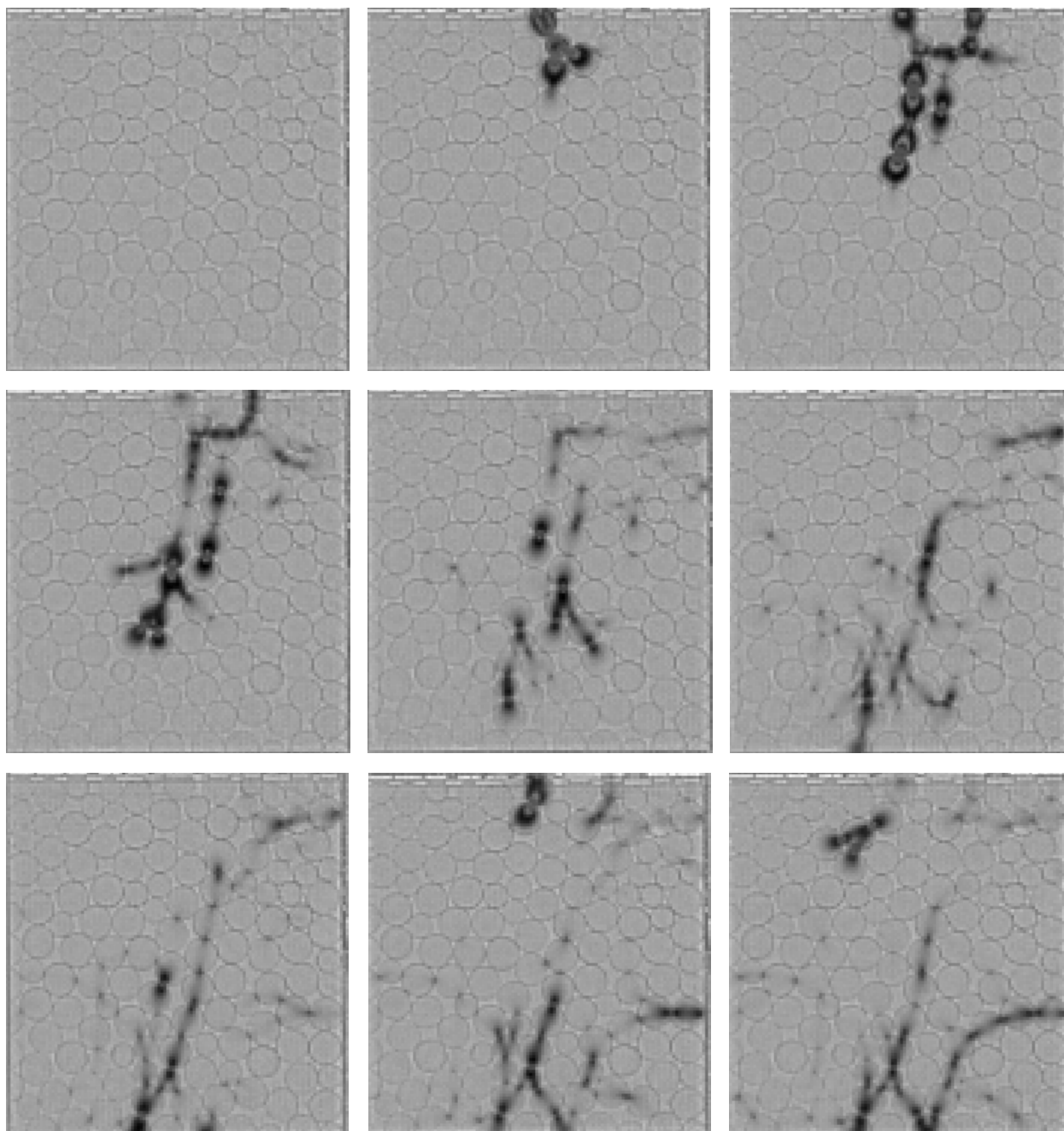
Pour terminer ce chapitre, je présente dans ce dernier paragraphe quelques expériences très préliminaires concernant des impacts sur des empilements bidimensionnels. Il s'agit de la suite naturelle des expériences d'impact sur des chaînes 1D. Nous n'avons encore procédé à aucune mesure quantitative sur ces systèmes. Je présente trois types d'expériences réalisées sur des empilements différents : ordonné avec un arrangement hexagonal (Fig. VI.19), ordonné avec un arrangement carré (Fig. VI.20) et désordonné (Fig. VI.21). On laisse tomber une bille d'acier de masse 22 g à l'intérieur d'un guide cylindrique. Cette bille impacte ensuite *un seul* grain de l'empilement. Dans les expériences que je présente ici, les empilements ne sont pas soumis à une force extérieure ( $F_{\text{tot}} = 0$ ), et il n'existe donc pas de chaînes de forces statiques. Il s'agit donc d'une propagation d'onde dans un empilement bidimensionnel en régime fortement non-linéaire.



**FIG. VI.19** – *Impact d’une bille en acier (masse 22 g) sur un empilement bidimensionnel de grains répartis suivant un arrangement hexagonal. La bille impacte un seul grain. Les images sont séparées de 70  $\mu$ s. On voit que l’onde se propage le long des lignes principales liées à la géométrie de l’empilement. Remarquons ce qu’il arrive au grain dont le contour a été marqué par un cercle. Au début, l’onde ne passe pas par ce grain et le contourne, traduisant ainsi que le contact n’est pas établi avec le grain du dessus. Mais comme l’onde est de grande amplitude, elle suffit pour activer ce contact et alors l’onde passe finalement par ce grain. Dans ce cas, l’activation de nouveaux contacts n’est pas due à l’augmentation de la force statique mais au passage de l’onde elle-même.*



**FIG. VI.20** – *Impact d’une bille en acier sur un empilement bidimensionnel avec un arrangement carré. Les images sont séparées de  $100\ \mu\text{s}$ .*



**FIG. VI.21** – *Impact d’une bille en acier sur un empilement bidimensionnel désordonné. Le milieu est constitué de grains de diamètre 13 mm et 9.6 mm. Les images sont séparées de 80  $\mu$ s.*



# Conclusion générale

Au cours de ce travail de thèse, nous avons développé une nouvelle thématique au sein du laboratoire : l'étude expérimentale de la propagation d'ondes sonores dans des empilements granulaires secs. Dans ces milieux, les ondes sonores présentent des comportements originaux et mal élucidés liés à la non-linéarité de la loi de contact entre les grains, au caractère unilatéral de cette loi ainsi qu'au désordre dans le réseau des contacts inhérent à tout empilement de grains.

Notre étude est originale car nous utilisons des empilements granulaires modèles constitués de grains photoélastiques. Associés à une caméra ultra-rapide, nous sommes capables de visualiser le champ de déformation dans l'empilement en temps réel. Nous avons développé une méthode simple et rapide de traitement d'images afin d'obtenir des informations quantitatives à partir des images photoélastiques. Pour mettre en oeuvre cette technique, nous avons utilisé des grains cylindriques. La plupart des études antérieures, tant expérimentales que numériques et théoriques, utilisent des grains sphériques dont la loi de contact est donnée par la loi de Hertz. Cela permet donc, en plus, d'étendre les résultats déjà obtenus pour un contact entre sphères à un nouveau comportement du contact.

Nous avons conçu deux dispositifs expérimentaux pour examiner trois situations distinctes : d'abord la propagation d'ondes en régime linéaire dans une chaîne 1D (Chap. IV), puis la propagation d'ondes de forte amplitude en régime non-linéaire dans la même chaîne 1D (Chap. V). Enfin on s'est intéressé à la propagation d'ondes dans un empilement ordonné 2D en régime linéaire (Chap. VI). Une grande partie du travail a consisté à concevoir un protocole de traitement d'images, simple et rapide, afin de tirer des informations quantitatives à partir des images photoélastiques (Chap. III). Pour chacune des trois situations citées plus haut, nous avons dû adapter ce traitement d'images.

Nous rappelons ci-après les principaux résultats que nous avons trouvés. Cette conclusion reprend de façon succincte les conclusions que l'on a faites à chaque chapitre.



- Nous avons tout d'abord cherché à généraliser la loi de Hertz pour des grains de forme cylindrique. Nous avons, au chapitre III, déterminé expérimentalement les paramètres du contact entre des cylindres, ce que nous avons appelé les lois «  $F_0 - S$  » et «  $F_0 - \delta$  ». Cela nous a permis de mettre en évidence un désaccord entre les mesures expérimentales et les prédictions théoriques pour les faibles forces de compression  $F_0$ . Nous avons montré que l'on peut modéliser la loi de contact pour ce type de grains par une double loi de puissance du type  $F_0 \propto \delta^\alpha$  avec  $\alpha = 1.78$  pour  $F_0 < 20$  N et  $\alpha = 1.37$  pour  $F_0 > 20$  N. Aux faibles compressions, la non-linéarité de la loi de contact est plus importante que pour des sphères ( $F \propto \delta^{3/2}$ ). Aux plus grandes forces, la non-linéarité diminue, se rapproche du comportement théorique attendu et devient inférieure à celle des sphères. Nous avons montré que ce changement de comportement était lié aux imperfections et à la rugosité des surfaces engendrées par l'usinage des grains.

- Nous avons ensuite analysé la dépendance entre la vitesse  $c_s$  des ondes sonores en régime linéaire avec la force de confinement statique  $F_0$  dans une chaîne 1D (Chap. IV). Les mesures montrent deux régimes distincts suivant la valeur de  $F_0$ . Les données peuvent être ajustées par deux lois de puissance  $c_s \propto F_0^\beta$  avec  $\beta \approx 1/4$  pour  $F_0 < 20$  N et  $\beta \approx 1/9$  pour  $F_0 > 20$  N. Le changement de régime a lieu à la même force  $F_c$  que celle pour les lois «  $F_0 - S$  » et «  $F_0 - \delta$  ». On en déduit raisonnablement que ce sont aussi les imperfections de surface qui sont responsables de ce changement de comportement pour la loi de vitesse. De plus, un modèle de masses et de ressorts vérifiant la loi expérimentale «  $F_0 - \delta$  » permet de retrouver, à un facteur multiplicatif près, le comportement de la vitesse avec  $F_0$ . Enfin, notons que pour les grandes force de confinement  $F_0$ , la puissance  $\beta \approx 1/9$  trouvée pour la loi de vitesse est inférieure à celle obtenue pour une chaîne de sphères ( $\beta = 1/6$ ), ce qui est logique car pour des cylindres la non-linéarité de la loi de contact est plus faible que celle pour les sphères.

Des expériences analogues effectuées sur des cylindres en acier et sur des grains parallélépipédiques en polycarbonate mettent aussi en avant un exposant  $1/4$  aux faibles forces de confinement statique  $F_0$ . Nos résultats laissent raisonnablement penser que la force à laquelle le comportement théorique attendu est retrouvé augmente lorsque la rugosité augmente.

Enfin, nous nous sommes intéressés à la dissipation qui se produit dans la chaîne. On a montré que la principale cause de dissipation est le frottement solide qui a lieu entre les grains et le support.

• Dans le chapitre V, nous avons étudié le régime non-linéaire obtenu pour les ondes de grande amplitude dans la chaîne 1D de cylindres. En fonction de la force de confinement statique  $F_0$ , on observe deux profils spatiaux pour la forme de l'onde. Pour les grandes forces, l'onde a une taille d'une douzaine de grains et la force varie lentement d'un grain à l'autre. Pour les petites valeurs de  $F_0$ , l'impulsion initiale se décompose en une succession de pics fins et d'amplitudes décroissantes qui se propagent à des vitesses différentes. Cela ressemble à la décomposition déjà observée pour les chaînes de sphères. Nous avons estimé la largeur du premier pic à 3.8 grains. En généralisant l'analyse de Nesterenko pour une loi du type  $F \propto \delta^\alpha$ , on trouve qu'une telle taille d'onde solitaire est obtenue pour  $\alpha \approx 1.75$ . Cette valeur est tout à fait cohérente avec celle que nous avons déterminée expérimentalement pour la loi  $\ll F_0 - \delta \gg$ .

Nous avons ensuite déterminé l'évolution de la vitesse  $V$  des ondes non-linéaires avec leur amplitude  $F_m$ . Nous avons montré que ces ondes sont supersoniques comparée à la vitesse du son linéaire et la croissance de  $V$  avec  $F_m$  est d'autant plus rapide que  $F_0$  est petit. De plus, les valeurs de  $V/c_s$  obtenues pour les différentes forces statiques  $F_0$  se superposent sur une même courbe en fonction du rapport  $F_m/F_0$ . On a généralisé le calcul de Nesterenko pour une loi du type  $F \propto \delta^\alpha$  et on a montré qu'effectivement  $V/c_s$  était uniquement fonction de  $F_m/F_0$  et de  $\alpha$ . La courbe théorique s'ajuste très bien aux données expérimentales en prenant  $\alpha = 1.78$ , la valeur obtenue par la courbe  $\ll F_0 - \delta \gg$  aux faibles forces.

Les propriétés de l'onde en régime non-linéaire (largeur  $L_\alpha$  et loi de vitesse  $V/c_s$ ) sont en accord avec les prédictions théoriques en prenant une loi de contac du type  $F \propto \delta^\alpha$  avec  $\alpha = 1.78$ . Cette valeur n'est pas un paramètre ajustable ; il s'agit de la puissance que nous avons déterminé expérimentalement aux faibles compressions pour la loi  $\ll F_0 - \delta \gg$ . Nous ne savons pas encore bien interpréter le fait que cette puissance est privilégiée au détriment de l'autre ( $\alpha = 1.37$ ) obtenue pour les grandes forces statiques de confinement.

• Dans le dernier chapitre (Chap. VI), nous avons changé de dispositif expérimental afin d'étudier le cas d'un empilement 2D. On s'est intéressé à la propagation d'ondes sonores en régime linéaire dans un empilement ordonné 2D. On observe que les ondes de petites amplitudes se propagent le long des chaînes de forces statiques. On a mesuré la vitesse de ces ondes le long des chaînes de forces. Lorsque la force le long de cette dernière augmente, la vitesse croît. En comparant différentes chaînes soumises à une même force moyenne  $F_0$ , nous avons constaté une dispersion importante des résultats. De plus, les vitesses sont systématiquement inférieures aux mesures de  $c_s$  pour la chaîne 1D soumise à une force  $F_0$

identique. Ce point n'est pas élucidé et demande d'autres investigations. Nous souhaiterions aussi étudier la vitesse des ondes de grande longueur d'onde entre un point d'émission et un point de réception en fonction de la compression uniaxiale appliquée à l'échantillon. Cette mesure se ferait parallèlement à la visualisation par photoélasticité des contacts actifs dans l'assemblée de grains. On serait ainsi capable de trancher expérimentalement sur le lien entre la vitesse des ondes et le nombre de contacts actifs.

### Perspectives

Il faudrait dans un premier temps répondre aux questions soulevées durant cette thèse et qui, à ce stade, n'ont pas encore trouvé d'interprétation (forme des ondes non-linéaires, puissance  $\alpha = 1.78$  privilégiée par rapport à  $\alpha = 1.37$ , vitesse le long des chaînes de force à 2D inférieure à celle à 1D pour une même force statique...). Il faudra pour cela réaliser de nouvelles expériences et/ou simulations numériques.

Par la suite, il faudrait coupler les mesures de vitesse à 2D à la détermination par photoélasticité du nombre de contacts actifs dans l'empilement. On pourrait ainsi étudier le lien entre l'activation de nouveaux contacts et la vitesse des ondes. Il serait aussi intéressant, à l'avenir, d'étudier en photoélasticité le régime de diffusion des ondes à 2D lorsque la longueur d'onde devient comparable à la taille des grains. Il faudrait ensuite étudier quantitativement le régime fortement non-linéaire pour un empilement 2D dont j'ai présenté quelques séquences d'images à la fin du chapitre VI.

Enfin, un autre projet consisterait à reprendre toutes ces expériences non plus pour un empilement *sec* mais pour un empilement *mouillé*. La présence d'un pont liquide entre les grains changera la loi de contact et modifiera ainsi les propriétés des ondes.

---

# Annexe A

## Les polariscope

### Sommaire

<b>A.1 Le polariscope plan . . . . .</b>	<b>169</b>
<b>A.2 Le polariscope circulaire . . . . .</b>	<b>170</b>

Nous présentons dans cette annexe les calculs relatifs à la détermination de l'intensité lumineuse  $I$  en sortie d'un polariscope plan puis d'un polariscope circulaire.

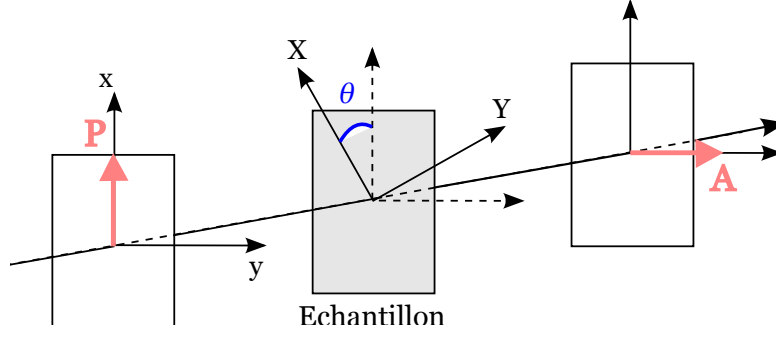
### A.1 Le polariscope plan

Le schéma du dispositif est représenté sur la figure A.1. Nous disposons d'un polariscope plan constitué, dans le sens de la propagation, d'un polariseur  $P$ , du matériau biréfringent d'épaisseur  $e$  et d'un analyseur  $A$  perpendiculaire à  $P$ .  $(O, X, Y)$  est le repère dont les axes sont confondus avec les axes optiques. Nous introduisons  $\theta$  l'angle entre la direction  $\mathbf{x}$  du polariseur et la direction principale  $\mathbf{X}$  du matériau.

A la sortie du polariseur, le champ  $\mathbf{E}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E_0 \cos(\omega t) \mathbf{x} \\ &= E_0 \cos \theta \cos(\omega t) \mathbf{X} + E_0 \sin \theta \cos(\omega t) \mathbf{Y}\end{aligned}$$

Après la traversée du matériau photoélastique, une des composantes à un retard de  $\phi/2$  et l'autre est en avance de  $\phi/2$  :



**FIG. A.1** – Schéma d'un polariscope plan constitué d'un polariseur  $P$ , de l'échantillon biréfringent et d'un analyseur  $A$ . Les axes optiques de biréfringence  $(X, Y)$  sont inclinés d'un angle  $\theta$  par rapport à la direction du polariseur.

$$\mathbf{E} = E_0 \cos \theta \cos \left( \omega t - \frac{\phi}{2} \right) \mathbf{X} + E_0 \sin(\theta) \cos \left( \omega t + \frac{\phi}{2} \right) \mathbf{Y}$$

L'analyseur sélectionne la composante de  $\mathbf{E}$  suivant  $\mathbf{y}$ , si bien qu'en sortie de celui-ci, l'amplitude du champ vaut  $E_{\text{sortie}}$  :

$$\begin{aligned} E_{\text{sortie}} &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{y} = \frac{E_0}{2} \sin(2\theta) \left[ \cos \left( \omega t - \frac{\phi}{2} \right) - \cos \left( \omega t + \frac{\phi}{2} \right) \right] \\ &= -\frac{E_0}{2} \sin(2\theta) \sin \left( \frac{\phi}{2} \right) \sin(\omega t) \end{aligned}$$

L'intensité lumineuse  $I$  perçue par un détecteur en sortie vaut donc :

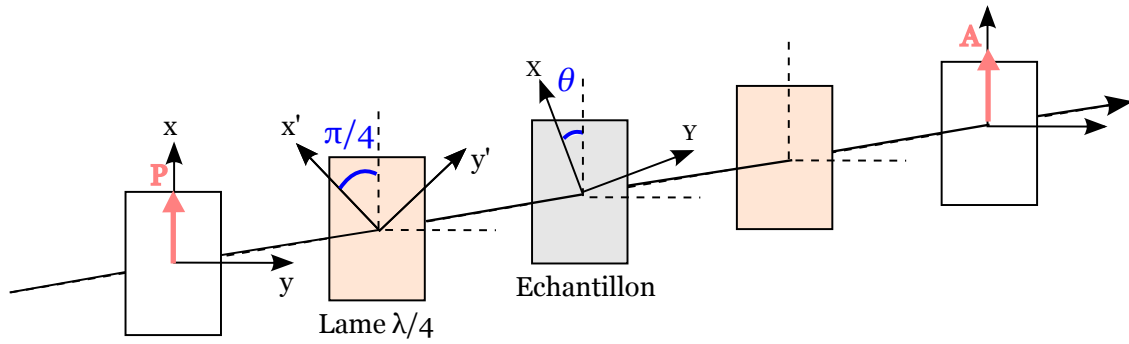
$$I = \frac{E_0^2}{4} \sin^2(2\theta) \sin^2 \left( \frac{\phi}{2} \right) \quad (\text{A.1})$$

## A.2 Le polariscope circulaire

Nous présentons dans ce paragraphe le polariscope circulaire. Il s'agit du même montage que précédemment auquel on ajoute deux lames quart d'onde situées avant et après l'échantillon (figure A.2). Nous choisissons que l'axe lent de la première lame quart d'onde soit l'axe  $\mathbf{x}'$  (incliné de  $\pi/4$  par rapport à la direction du polariseur) et l'axe lent de la deuxième lame quart d'onde soit l'axe  $\mathbf{y}'$ .

Après le polariseur, le champ  $\mathbf{E}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 \cos(\omega t) \mathbf{x} \\ &= E_0 \cos(\omega t) \mathbf{x}' + E_0 \cos(\omega t) \mathbf{y}' \end{aligned}$$



**FIG. A.2** — Schéma d'un polariscope circulaire constitué d'un polariseur  $P$ , d'une lame quart d'onde d'axe lent  $x'$ , de l'échantillon biréfringent, d'une deuxième lame quart d'onde d'axe lent  $y'$  et d'un analyseur  $A$ . Les axes de la lame quart d'onde sont inclinés de  $\pi/4$  par rapport à la direction du polariseur. Les axes optiques de biréfringence  $(X, Y)$  sont inclinés d'un angle  $\theta$  par rapport à la direction du polariseur.

On obtient à la sortie de la première lame :

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin(\omega t) \mathbf{x}' + \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t) \mathbf{y}'$$

Réécrivons cette équation en l'exprimant dans la base  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  liée aux axes de l'échantillon biréfringent.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left[ \sin(\omega t) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) + \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \right] \mathbf{X} \\ &+ \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left[ -\sin(\omega t) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \right] \mathbf{Y} \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\cos(\pi/4 + \theta) = \sin(\pi/4 - \theta)$ , l'équation précédente se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left[ \sin(\omega t) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) + \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \right] \mathbf{X} \\ &+ \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left[ -\sin(\omega t) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) + \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \right] \mathbf{Y} \end{aligned}$$

que l'on peut réécrire :

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left[ \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \theta\right) \mathbf{X} + \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \theta\right) \mathbf{Y} \right]$$

On pose  $\omega t' = \omega t + \frac{\pi}{4} - \theta$ , ce qui permet de simplifier l'équation précédente en :

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} [\sin(\omega t') \mathbf{X} + \cos(\omega t') \mathbf{Y}]$$

A la sortie de l'échantillon biréfringent, la composante suivant  $\mathbf{X}$  du champ électrique a subi un déphasage  $\phi$ , le champ s'écrit alors :

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} [\sin(\omega t' - \phi) \mathbf{X} + \cos(\omega t') \mathbf{Y}]$$

Nous exprimons le champ électrique dans la base  $(x', y')$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left[ \sin(\omega t' - \phi) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) - \cos(\omega t') \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \right] \mathbf{x}' \\ &+ \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left[ \sin(\omega t' - \phi) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \cos(\omega t') \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \right] \mathbf{y}' \\ \mathbf{E} &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left[ \sin(\omega t' - \phi) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) - \cos(\omega t') \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \right] \mathbf{x}' \\ &+ \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left[ \sin(\omega t' - \phi) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \cos(\omega t') \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \right] \mathbf{y}' \end{aligned}$$

Nous allons utiliser dans la suite plusieurs formules de trigonométrie que je rappelle pour la lisibilité du calcul :

$$\begin{aligned} \sin(u) \times \cos(v) &= \frac{\sin(u+v) + \sin(u-v)}{2} \\ \sin(u) + \sin(v) &= 2 \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \cos\left(\frac{u-v}{2}\right) \\ \cos(u) + \cos(v) &= 2 \cos\left(\frac{u+v}{2}\right) \cos\left(\frac{u-v}{2}\right) \\ \cos(u) - \cos(v) &= -2 \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \\ \sin(u) - \sin(v) &= 2 \cos\left(\frac{u+v}{2}\right) \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \end{aligned}$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{E_0}{2\sqrt{2}} [\cos(\omega t - 2\theta - \phi) + \sin(\omega t - \phi) - \cos(\omega t - 2\theta) + \sin(\omega t)] \mathbf{x}' \\ &+ \frac{E_0}{2\sqrt{2}} [\cos(\omega t - \phi) + \sin(\omega t - 2\theta - \phi) + \cos(\omega t) - \sin(\omega t - 2\theta)] \mathbf{y}'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left[ \sin\left(\omega t - \frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\omega t - 2\theta - \frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \mathbf{x}' \\ &+ \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left[ \cos\left(\omega t - \frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \cos\left(\omega t - 2\theta - \frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \mathbf{y}'\end{aligned}$$

A la sortie de la deuxième quart d'onde, dont l'axe lent est cette fois-ci suivant  $\mathbf{y}'$ , le champ s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left[ \sin\left(\omega t - \frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\omega t - 2\theta - \frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \mathbf{x}' \\ &+ \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left[ \sin\left(\omega t - \frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\omega t - 2\theta - \frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \mathbf{y}'\end{aligned}$$

L'analyseur est parallèle au polariseur, si bien que l'amplitude du champ résultant  $E_{sortie}$  vaut :

$$\begin{aligned}E_{sortie} &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} \\ &= E_0 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\omega t - \frac{\phi}{2}\right)\end{aligned}$$

L'intensité lumineuse  $I$  en sortie du polariscope circulaire vaut donc :

$$I = \frac{E_0^2}{2} \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (\text{A.2})$$





## Annexe B

# Un modèle de compression d'un cylindre

Cette annexe reprend la démonstration exposée dans [50] et présente les calculs d'un modèle de compression d'un cylindre. On fait l'hypothèse que l'état de contrainte en un point  $M(0, 0, z)$  du cylindre (Fig. B.1), situé sur l'axe  $z$  entre le centre  $C$  et le point de chargement  $O_1$  est la somme de trois contributions :

- une contrainte due à la pression hertzienne de contact donnée par l'équation III.15

$$\sigma_{xx} = -\frac{2z}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{p(s) (x-s)^2 ds}{[(x-s)^2 + z^2]} \quad (\text{B.1})$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{2z^3}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{p(s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]} \quad (\text{B.2})$$

- une contrainte biaxiale donnée par l'équation III.16
- une contrainte due au contact au point  $O_2$  qui peut être considérée comme étant due à

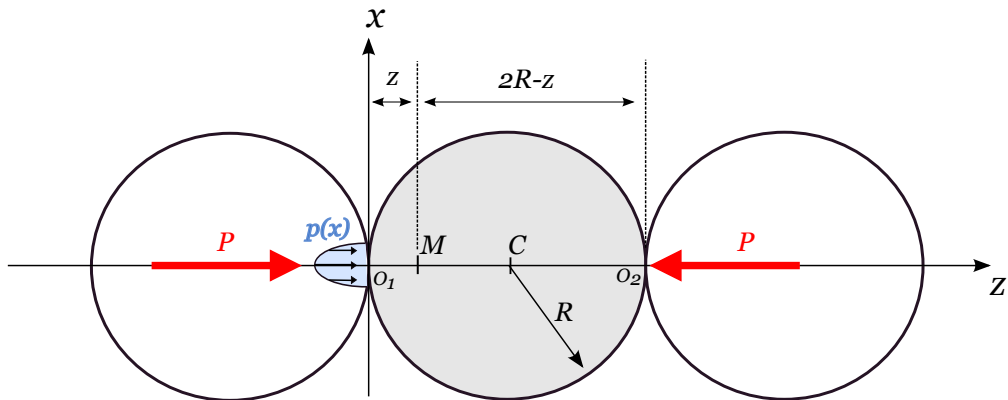


FIG. B.1 – Contact entre trois cylindres.

la force de compression  $P$  localisée

$$\sigma_{xx} = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 (2R - z)}{[x^2 + (2R - z)^2]^2} \quad (\text{B.3})$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{2P}{\pi} \frac{(2R - z)^3}{[x^2 + (2R - z)^2]^2} \quad (\text{B.4})$$

En sommant ces trois contributions, on trouve que l'état de contrainte du point  $M$  vaut :

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{\pi} \left[ \frac{1}{R} - \frac{2(a^2 + 2z^2)}{a^2 (a^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{4z}{a^2} \right] \quad (\text{B.5})$$

$$\sigma_{zz} = \frac{P}{\pi} \left[ \frac{1}{R} - \frac{2}{2R - z} - \frac{2}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \right] \quad (\text{B.6})$$

Nous allons supposer le cylindre infini (ce qui n'est évidemment pas le cas car le rapport d'aspect est proche de 1), ce qui permet de nous placer dans le cadre des déformations planes [48]. La déformation  $\epsilon_z$  est alors reliée aux contraintes par :

$$\epsilon_{zz} = \frac{1 - \nu^2}{E} \left( \sigma_{zz} - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{xx} \right) \quad (\text{B.7})$$

En intégrant  $\epsilon_z$  entre  $z = 0$  et  $z = R$ , on trouve l'écrasement  $\delta_1$  de la moitié supérieure du cylindre dû à la compression :

$$\delta_1 = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} P \left[ 2 \ln \left( \frac{4R}{a} \right) - 1 \right] \quad (\text{B.8})$$

On peut faire la même intégration pour la moitié inférieure du cylindre et en sommant les deux écrasements, on trouve la relation suivante :

$$\delta = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} 2P \left[ 2 \ln \left( \frac{4R}{a} \right) - 1 \right] \quad (\text{B.9})$$

En injectant l'expression de la demi-largeur  $a$  dans cette équation, on trouve la relation entre la force de compression  $F$  et l'écrasement  $\delta$  du cylindre :

$$\delta = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{2F}{L} \left[ \ln \left( \frac{4\pi ERL}{(1 - \nu^2)F} \right) - 1 \right] \quad (\text{B.10})$$

# Bibliographie

- [1] H.M. JAEGER, S.R. NAGEL et R.P. BEHRINGER, “Granular solids, liquids, and gases”. *Reviews of Modern Physics* **68**, 1259–1273 (1996).
- [2] P.G. DE GENNES, “Granular matter : a tentative view”. *Reviews of Modern Physics* **71**, 374–382 (1999).
- [3] J. RAJCHENBACH, “Granular flows”. *Advances in Physics* **49**, 229–256 (2000).
- [4] B. ANDREOTTI, Y. FORTERRE et O. POULIQUEN, *Les milieux granulaires : entre fluide et solide*. EDP Sciences (2011).
- [5] J. RAJCHENBACH, “Dynamics of grain avalanches”. *Physical Review Letters* **88** (1), 14 301 (2001).
- [6] J. RAJCHENBACH, “Development of grain avalanches”. *Physical Review Letters* **89** (7), 74 301 (2002).
- [7] S.B. SAVAGE et K. HUTTER, “The motion of a finite mass of granular material down a rough incline”. *Journal of Fluid Mechanics* **199**, 177–215 (1989).
- [8] C.S. CAMPBELL, “Rapid granular flows”. *Annual Review of Fluid Mechanics* **22**, 57–90 (1990).
- [9] J. RAJCHENBACH, “Dense, rapid flows of inelastic grains under gravity”. *Physical Review Letters* **90**, 144 302 (2003).
- [10] R. G. BAGNOLD, *The physics of blown sand and desert dunes*. Chapman & Hall (1941).
- [11] J. DURAN, *Sables, poudres et grains*. Eyrolles sciences (1997).
- [12] K. RIETEMA, *The dynamics of fine powders*. Kluwer Academic Pub (1991).
- [13] D.J. HORNBAKER, R. ALBERT, I. ALBERT, A.L. BARABASI et P. SHIFFER, “What keep sandcastle”. *Nature* **387**, 765–6 (1997).

- 
- [14] R. ALBERT, I. ALBERT, D. HORNBAKER, P. SCHIFFER et A.L. BARABÁSI, “Maximum angle of stability in wet and dry spherical granular media”. *Physical Review E* **56**, 6271–6274 (1997).
- [15] F. RESTAGNO, C. URSINI, H. GAYVALLET et É. CHARLAIX, “Aging in humid granular media”. *Physical Review E* **66**, 021 304 (2002).
- [16] L. BOCQUET, E. CHARLAIX, S. CILIBERTO et J. CRASSOUS, “Moisture-induced ageing in granular media and the kinetics of capillary condensation”. *Nature* **396**, 735–737 (1998).
- [17] J.C. GÉMINARD, D. BOURAYA et H. GAYVALLET, “Thermal conductivity associated with a bead-bead contact decorated by a liquid bridge”. *The European Physical Journal B* **48**, 509–517 (2005).
- [18] M. AMMI, T. TRAVERS, D. BIDEAU, A. GERVOIS, J.C. MESSENGER et J.P. TROADEC, “Uniaxial compression of 2d and 3d packings : electrical conductivity measurements”. *Journal de Physique* **49**, 221–226 (1988).
- [19] E. FALCON et B. CASTAING, “Propriétés électriques de la matière granulaire : l’effet branly continu”. *Bulletin de la Société Française de Physique* **148**, 9–11 (2005).
- [20] E. FALCON, B. CASTAING et M. CREYSSELS, “Propriétés électriques de la matière granulaire : bruit et intermittence”. *Bulletin de la Société Française de Physique* **149**, 6–9 (2005).
- [21] M. CREYSSELS, S. DORBOLO, A. MERLEN, C. LAROCHE, B. CASTAING et E. FALCON, “Some aspects of electrical conduction in granular systems of various dimensions”. *The European Physical Journal E* **23**, 255–264 (2007).
- [22] S. DORBOLO, A. MERLEN, M. CREYSSELS, N. VANDEWALLE, B. CASTAING et E. FALCON, “Effects of electromagnetic waves on the electrical properties of contacts between grains”. *Europhysics Letters* **79**, 54 001 (2007).
- [23] M. CREYSSELS, E. FALCON et B. CASTAING, “Experiment and theory of the electrical conductivity of a compressed granular metal”. *Powders and Grains 2009* **1145**, 123 (2009).
- [24] H. HERTZ, “On the contact of elastic solids”. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **92**, 156–171 (1881).
- [25] L.D. LANDAU et E.M. LIFSCHITZ, *Théorie de l’élasticité*. Editions Mir (1967).
-

- 
- [26] J.N. ROUX, “Contact disorder and non-linear elasticity of granular packings : a simple model”. *Powder and Grains* 97 pages 215–218 (1997).
- [27] C. LIU et S.R. NAGEL, “Sound in sand”. *Physical Review Letters* **68**, 2301–2304 (1992).
- [28] C. LIU et S.R. NAGEL, “Sound and vibration in granular materials”. *Journal of Physics : Condensed Matter* **6**, A433 (1994).
- [29] C. LIU et S.R. NAGEL, “Sound in a granular material : disorder and nonlinearity”. *Physical Review B* **48**, 15 646 (1993).
- [30] C. LIU, “Spatial patterns of sound propagation in sand”. *Physical Review B* **50**, 782 (1994).
- [31] A. SHUKLA, “Dynamic photoelastic studies of wave propagation in granular media”. *Optics and Lasers in Engineering* **14**, 165–184 (1991).
- [32] M.H. SADD, Q. TAI et A. SHUKLA, “Contact law effects on wave propagation in particulate materials using distinct element modeling”. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **28**, 251–265 (1993).
- [33] A. SHUKLA, M.H. SADD, R. SINGH, Q. TAI et S. VISHWANATHAN, “Role of particle shape and contact profile on the dynamic response of particulate materials”. *Optics and Lasers in Engineering* **19**, 99–119 (1993).
- [34] Y. ZHU, A. SHUKLA et M.H. SADD, “The effect of microstructural fabric on dynamic load transfer in two dimensional assemblies of elliptical particles”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **44**, 1283–1303 (1996).
- [35] P. DANTU, “Contribution à l’étude mécanique et géométrique des milieux pulvérulents” (1957).
- [36] T. TRAVERS, M. AMMI, D. BIDEAU, A. GERVOIS, JC MESSENGER et JP TROADEC, “Uniaxial compression of 2d packings of cylinders. effects of weak disorder”. *Europhysics Letters* **4**, 329 (1987).
- [37] T. TRAVERS, M. AMMI, D. BIDEAU, A. GERVOIS, J.C. MESSENGER et J.P. TROADEC, “Mechanical size effects in 2d granular media”. *Journal de Physique* **49**, 939–948 (1988).
- [38] D. HOWELL, R.P. BEHRINGER et C. VEJE, “Stress fluctuations in a 2d granular couette experiment : a continuous transition”. *Physical Review Letters* **82**, 5241–5244 (1999).
-

- 
- [39] J. GENG, D. HOWELL, E. LONGHI, R.P. BEHRINGER, G. REYDELLET, L. VANEL, E. CLÉMENT et S. LUDING, “Footprints in sand : the response of a granular material to local perturbations”. *Physical Review Letters* **87**, 35 506 (2001).
  - [40] J. GENG, G. REYDELLET, É. CLÉMENT et R.P. BEHRINGER, “Green’s function measurements of force transmission in 2d granular materials”. *Physica D* **182**, 274–303 (2003).
  - [41] T.S. MAJMUDAR et R.P. BEHRINGER, “Contact force measurements and stress-induced anisotropy in granular materials”. *Nature* **435**, 1079–1082 (2005).
  - [42] D.M. MUETH, H.M. JAEGER et S.R. NAGEL, “Force distribution in a granular medium”. *Physical Review E* **57**, 3164 (1998).
  - [43] C. LIU, S.R. NAGEL, D.A. SCHECTER, S.N. COPPERSMITH, S. MAJUMDAR, O. NARAYAN et T.A. WITTEN, “Force fluctuations in bead packs”. *Science* **269**, 513 (1995).
  - [44] F. RADJAI, M. JEAN, J.J. MOREAU et S. ROUX, “Force distributions in dense two-dimensional granular systems”. *Physical Review Letters* **77**, 274–277 (1996).
  - [45] F. RADJAI, S. ROUX et J.J. MOREAU, “Contact forces in a granular packing.” *Chaos* **9**, 544 (1999).
  - [46] C. VOIVRET, F. RADJAI, J.Y. DELENNE et M.S. EL YOUSOUFI, “Multiscale force networks in highly polydisperse granular media”. *Physical Review Letters* **102**, 178 001 (2009).
  - [47] H.A. MAKSE, D.L. JOHNSON et L.M. SCHWARTZ, “Packing of compressible granular materials”. *Physical Review Letters* **84**, 4160–4163 (2000).
  - [48] S.P. TIMOSHENKO et J.N. GOODIER, *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York (1970).
  - [49] A.E.H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge University Press (1952).
  - [50] K.L. JOHNSON, *Contact Mechanics*. Cambridge University Press (1987).
  - [51] E. DINTWA, E. TIJSKENS et H. RAMON, “On the accuracy of the hertz model to describe the normal contact of soft elastic spheres”. *Granular Matter* **10**, 209–221 (2008).
  - [52] J. BOUSSINESQ, *Application des potentiels à l’étude de l’équilibre et du mouvement des solides élastiques*. Gauthier-Villars (1885).
-

- 
- [53] V.F. NESTERENKO, *Dynamics of Heterogeneous Materials*. Springer Verlag (2001).
- [54] J.D. GODDARD, “Nonlinear elasticity and pressure-dependent wave speeds in granular media”. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical and Physical Sciences* **430**, 105 (1990).
- [55] B. GILLES et C. COSTE, “Low-frequency behavior of beads constrained on a lattice”. *Physical Review Letters* **90**, 174 302 (2003).
- [56] X. JIA, C. CAROLI et B. VELICKY, “Ultrasound propagation in externally stressed granular media”. *Physical Review Letters* **82**, 1863–1866 (1999).
- [57] P.G. DE GENNES, “Static compression of a granular medium : the « soft shell » model”. *Europhysics Letters* **35**, 145–150 (1996).
- [58] C. COSTE et B. GILLES, “On the validity of Hertz contact law for granular material acoustics”. *The European Physical Journal B* **7**, 155–168 (1999).
- [59] M. PEYRARD et T. DAUXOIS, *Physique des solitons*. EDP Sciences (2004).
- [60] V.F. NESTERENKO. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **5**, 733 (1984).
- [61] C. COSTE, E. FALCON et S. FAUVE, “Solitary waves in a chain of beads under hertz contact”. *Physical Review E* **56**, 6104 (1997).
- [62] E. FALCON, *Comportements dynamiques associés au contact de Hertz : processus collectifs de collision et propagation d’ondes solitaires dans les milieux granulaires*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1 (1997).
- [63] C. DARAIO, V.F. NESTERENKO, E.B. HERBOLD et S. JIN, “Strongly nonlinear waves in a chain of Teflon beads”. *Physical Review E* **72**, 016 603 (2005).
- [64] C. DARAIO et V.F. NESTERENKO, “Strongly nonlinear wave dynamics in a chain of polymer coated beads”. *Physical Review E* **73**, 026 612 (2006).
- [65] C. DARAIO, V.F. NESTERENKO, E.B. HERBOLD et S. JIN, “Tunability of solitary wave properties in one-dimensional strongly nonlinear phononic crystals”. *Physical Review E* **73**, 026 610 (2006).
- [66] S. JOB, F. SANTIBANEZ, F. TAPIA et F. MELO, “Nonlinear waves in dry and wet hertzian granular chains”. *Ultrasonics* **48**, 506–514 (2008).
- [67] S. JOB, F. MELO, A. SOKOLOW et S. SEN, “Solitary wave trains in granular chains : experiments, theory and simulations”. *Granular Matter* **10**, 13–20 (2007).
- [68] A. SOKOLOW, E.G. BITTLE et S. SEN, “Solitary wave train formation in hertzian chains”. *Europhysics Letters* **77**, 24 002 (2007).
-



- 
- [69] E. HASCOËT, H.J. HERRMANN et V. LORETO, “Shock propagation in a granular chain”. *Physical Review E* **59**, 3202–3206 (1999).
- [70] A. SHUKLA, M.H. SADD, Y. XU et Q.M. TAI, “Influence of loading pulse duration on dynamic load-transfer in a simulated granular medium”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **41**, 1795–1808 (1993).
- [71] V.F. NESTERENKO, A.N. LAZARIDI et E.B. SIBIRYAKOV, “The decay of soliton at the contact of two « acoustic vacuums »”. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **36**, 166–168 (1995).
- [72] V.F. NESTERENKO, C. DARAIO, E.B. HERBOLD et S. JIN, “Anomalous wave reflection at the interface of two strongly nonlinear granular media”. *Physical Review Letters* **95**, 158 702 (2005).
- [73] L. VERGARA, “Scattering of solitary waves from interfaces in granular media”. *Physical Review Letters* **95**, 108 002 (2005).
- [74] L. VERGARA, “Scattering of solitary waves in granular media”. *Arxiv preprint cond-mat/0503457* (2005).
- [75] S. JOB, F. MELO, A. SOKOLOW et S. SEN, “How hertzian solitary waves interact with boundaries in a 1d granular medium”. *Physical Review Letters* **94**, 178 002 (2005).
- [76] J. YANG, C. SILVESTRO, D. KHATRI, L. DE NARDO et C. DARAIO, “Interaction of highly nonlinear solitary waves with linear elastic media”. *Physical Review E* **83**, 046 606 (2011).
- [77] S. JOB, F. SANTIBANEZ, F. TAPIA et F. MELO, “Wave localization in strongly nonlinear hertzian chains with mass defect”. *Physical Review E* **80**, 025 602 (2009).
- [78] E. HASCOËT et H.J. HERRMANN, “Shocks in non-loaded bead chains with impurities”. *The European Physical Journal B* **14**, 183–190 (2000).
- [79] F. MELO, S. JOB, F. SANTIBANEZ et F. TAPIA, “Experimental evidence of shock mitigation in a hertzian tapered chain”. *Physical Review E* **73**, 041 305 (2006).
- [80] R.L. DONEY et S. SEN, “Impulse absorption by tapered horizontal alignments of elastic spheres”. *Physical Review E* **72**, 041 304 (2005).
- [81] R. DONEY et S. SEN, “Decorated, tapered, and highly nonlinear granular chain”. *Physical Review Letters* **97**, 155 502 (2006).
-

- 
- [82] E.B. HERBOLD, J. KIM, V.F. NESTERENKO, S.Y. WANG et C. DARAIO, “Pulse propagation in a linear and nonlinear diatomic periodic chain : effects of acoustic frequency band-gap”. *Acta Mechanica* **205**, 85–103 (2009).
- [83] N. BOECHLER, G. THEOCHARIS, S. JOB, P.G. KEVREKIDIS, M.A. PORTER et C. DARAIO, “Discrete breathers in one-dimensional diatomic granular crystals”. *Physical Review Letters* **104**, 244 302 (2010).
- [84] N. BOECHLER, J. YANG, G. THEOCHARIS, P.G. KEVREKIDIS et C. DARAIO, “Tunable vibrational band gaps in one-dimensional diatomic granular crystals with three-particle unit cells”. *Journal of Applied Physics* **109**, 074 906 (2011).
- [85] M.A. PORTER, C. DARAIO, E.B. HERBOLD, I. SZELENGOWICZ et P.G. KEVREKIDIS, “Highly nonlinear solitary waves in periodic dimer granular chains”. *Physical Review E* **77**, 015 601 (2008).
- [86] L. PONSON, N. BOECHLER, Y.M. LAI, M.A. PORTER, P.G. KEVREKIDIS et C. DARAIO, “Nonlinear waves in disordered diatomic granular chains”. *Physical Review E* **82**, 021 301 (2010).
- [87] E.B. HERBOLD et V.F. NESTERENKO, “Solitary and shock waves in discrete strongly nonlinear double power-law materials”. *Applied Physics Letters* **90**, 261 902 (2007).
- [88] A. ROSAS, A.H. ROMERO et K. LINDENBERG, “Pulse propagation in a chain of o-rings with and without precompression”. *Physical Review E* **82** (3), 031 308 (2010).
- [89] F. SANTIBANEZ, R. MUNOZ, A. CAUSSARIEU, S. JOB et F. MELO, “Experimental evidence of solitary wave interaction in hertzian chains”. *Arxiv preprint arXiv :1102.3364* (2011).
- [90] M. MANCIU, S. SEN et A.J. HURD, “Crossing of identical solitary waves in a chain of elastic beads”. *Physical Review E* **63**, 016 614 (2000).
- [91] J. DUFFY et MINDLIN R.D. *Journal of Applied Mechanics* **24**, 585 (1957).
- [92] H.A. MAKSE, N. GLAND, D.L. JOHNSON et L.M. SCHWARTZ, “Why effective medium theory fails in granular materials”. *Physical Review Letters* **83**, 5070–5073 (1999).
- [93] C. COSTE et B. GILLES, “Sound propagation in a constrained lattice of beads : High-frequency behavior and dispersion relation”. *Physical Review E* **77**, 021 302 (2008).
- [94] C. COSTE et B. GILLES, “Sound propagation in a lattice of elastic beads : Time of flight, dispersion relation and time-frequency analysis”. *Physics Procedia* **3**, 433–441 (2010).
-

- 
- [95] X. JIA et P. MILLS, “Sound propagation in dense granular materials”. *Powders and Grains 2001* pages 105–112 (2001).
- [96] T. TRAVERS, D. BIDEAU, A. GERVOIS, J.P. TROADEC et J.C. MESSENGER, “Uniaxial compression effects on 2d mixtures of « hard » and « soft » cylinders”. *Journal of Physics A* **19**, L1033 (1986).
- [97] S. ROUX, D. STAUFFER et H.J. HERRMANN, “Simulation of disordered systems of cylinders. I. geometrical behaviour”. *Journal de Physique* **48**, 341–345 (1987).
- [98] D. STAUFFER, H.J. HERRMANN et S. ROUX, “Simulation of disordered systems of cylinders. II. mechanical behaviour”. *Journal de Physique* **48**, 347–351 (1987).
- [99] HJ HERRMANN, D. STAUFFER et S. ROUX, “Violation of linear elasticity due to randomness”. *Europhysics Letters* **3**, 265 (1987).
- [100] S. ROUX et HJ HERRMANN, “Disorder-induced nonlinear conductivity”. *Europhysics Letters* **4**, 1227 (1987).
- [101] J.N. ROUX, “Elasticité non-linéaire d’un matériau granulaire modèle”. Dans *Colloque physique et mécanique des matériaux granulaire, Presses du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées* (2000).
- [102] H.A. MAKSE, N. GLAND, D.L. JOHNSON et L. SCHWARTZ, “Granular packings : Nonlinear elasticity, sound propagation, and collective relaxation dynamics”. *Physical Review E* **70**, 061 302 (2004).
- [103] B. VELICKÝ et C. CAROLI, “Pressure dependence of the sound velocity in a two-dimensional lattice of hertz-mindlin balls : Mean-field description”. *Physical Review E* **65**, 021 307 (2002).
- [104] E. SOMFAI, J.N. ROUX, J.H. SNOEIJER, M. VAN HECKE et W. VAN SAARLOOS, “Elastic wave propagation in confined granular systems”. *Physical Review E* **72**, 021 301 (2005).
- [105] J.H. PAGE, H.P. SCHRIEMER, I.P. JONES, P. SHENG et D.A. WEITZ, “Classical wave propagation in strongly scattering media”. *Physica A* **241**, 64–71 (1997).
- [106] X. JIA, “Codalike multiple scattering of elastic waves in dense granular media”. *Physical Review Letters* **93**, 154 303 (2004).
- [107] T. BRUNET, X. JIA et P. MILLS, “Mechanisms for acoustic absorption in dry and weakly wet granular media”. *Physical Review Letters* **101**, 138 001 (2008).
-

- 
- [108] X.P. JIA, J. LAURENT, Y. KHIDAS et V. LANGLOIS, “Sound scattering in dense granular media”. *Chinese Science Bulletin* **54**, 4327–4336 (2009).
- [109] A. MERKEL, V. TOURNAT et V. GUSEV, “Dispersion of elastic waves in three-dimensional noncohesive granular phononic crystals : Properties of rotational modes”. *Physical Review E* **82**, 031 305 (2010).
- [110] A. MERKEL, V. TOURNAT et V. GUSEV, “Experimental evidence of rotational elastic waves in granular phononic crystals”. *Physical Review Letters* **107**, 225 502 (2011).
- [111] A. MERKEL, *Étude Théorique et Expérimentale de la Propagation Acoustique dans les Cristaux Phononiques Granulaires Tridimensionnels*. Thèse de doctorat, Université du Maine (2010).
- [112] D. NGO, D. KHATRI et C. DARAIO, “Highly nonlinear solitary waves in chains of ellipsoidal particles”. *Physical Review E* **84**, 026 610 (2011).
- [113] E.T. OWENS et K.E. DANIELS, “Sound propagation and force chains in granular materials”. *Europhysics Letters* **94**, 54 005 (2011).
- [114] H.T. JESSOP et F.C. HARRIS, *Photoelasticity : principles & methods*. Dover Publications (1950).
- [115] T.S. MAJMUDAR, *Contact force measurements in sheared and isotropically compressed 2D granular systems*. Thèse de doctorat, Duke University (2006).
- [116] X. NOBLIN, G. HUILLARD et J. RAJCHENBACH, “Photoelastic study of acoustic wave propagation in grain packings”. *Powders and Grains 2009* **1145**, 439 (2009).
- [117] G. HUILLARD, X. NOBLIN et J. RAJCHENBACH, “Propagation of acoustic waves in a one-dimensional array of noncohesive cylinders”. *Physical Review E* **84**, 016 602 (2011).
- [118] E.B. HERBOLD et V.F. NESTERENKO, “Shock wave structure in a strongly nonlinear lattice with viscous dissipation”. *Physical Review E* **75**, 021 304 (2007).
- [119] A. ROSAS, A.H. ROMERO, V.F. NESTERENKO et K. LINDENBERG, “Observation of two-wave structure in strongly nonlinear dissipative granular chains”. *Physical Review Letters* **98**, 164 301 (2007).
- [120] R. CARRETERO-GONZÁLEZ, D. KHATRI, M.A. PORTER, P.G. KEVREKIDIS et C. DARAIO, “Dissipative solitary waves in granular crystals”. *Physical Review Letters* **102**, 24 102 (2009).
-

- [121] N.V. BRILLIANTOV, F. SPAHN, J.M. HERTZSCH et T. PÖSCHEL, “Model for collisions in granular gases”. *Physical Review E* **53**, 5382 (1996).
  - [122] F. GERL et A. ZIPPELIUS, “Coefficient of restitution for elastic disks”. *Physical Review E* **59**, 2361 (1999).
  - [123] S. MCNAMARA et E. FALCON, “Simulations of vibrated granular medium with impact-velocity-dependent restitution coefficient”. *Physical Review E* **71**, 031 302 (2005).
  - [124] V.F. NESTERENKO, “Solitary waves in discrete media with anomalous compressibility and similar to” sonic vacuum” ”. *Le Journal de Physique IV* **4** (C8), 8–8 (1994).
-



---

## Propagation d'ondes sonores dans des empilements granulaires non-cohésifs

Visualisation par photoélasticité

### Résumé :

La propagation d'ondes sonores dans des empilements granulaires présente des comportements originaux et mal-élucidés liés à l'aspect divisé de ces matériaux. Ceux-ci se comportent notamment comme des milieux désordonnés et non-linéaires. Notre étude est originale car nous employons des grains photoélastiques. Couplés à une caméra rapide, nous visualisons le champ de déformation associé à la propagation de l'onde sonore.

Nous abordons d'abord le cas de l'empilement le plus simple : une chaîne unidimensionnelle de grains cylindriques en contact. Nous étudions la propagation d'impulsions sonores dans les deux cas où leurs amplitudes sont petites (régime linéaire) ou grandes (régime non-linéaire) devant la force de confinement statique appliquée à la chaîne.

Dans le premier cas, nous observons l'effet des imperfections de surface des grains sur la vitesse des ondes. Nous constatons aussi que la dissipation est essentiellement due au frottement solide.

Pour les grandes amplitudes, l'impulsion initiale se décompose en un train de pics d'amplitudes décroissantes, de largeurs comprises entre 3 et 4 grains et de vitesses supersoniques. La vitesse du pic principal, adimensionnée par la vitesse du son linéaire, ne dépend que du rapport entre l'amplitude de l'onde et la force statique. Ces observations sont interprétées en généralisant les résultats de Nesterenko.

Nous présentons ensuite le cas des empilements bidimensionnels. Les ondes linéaires se propagent dans les chaînes de forces et leurs vitesses croissent avec la force statique. Elles restent cependant toujours inférieures à celles mesurées à 1D. Cela suggère que la dynamique de l'onde le long d'une chaîne de force est influencée par les contacts latéraux à cette chaîne de force.

**Mots-clés :** Milieu granulaire, transport d'ondes, non-linéarité, désordre, ondes sonores, ondes solitaires, photoélasticité

---

## Propagation of sound waves in cohesionless granular packings

Visualization by photoelasticity

### Abstract :

Propagation of sound waves in cohesionless granular packings presents original and complex behaviors due to the divided nature of those materials. They behave as disordered and nonlinear media. Our study is original because we use photoelastic cylinders. By means of a fast camera, we visualize the deformation field associated to the sound wave propagation.

First we are interested in the simplest granular packing : a one-dimensional array of cylinders in contact. We carry out an experimental investigation concerning the propagation of an acoustic pulse, in both cases where the pulse amplitude is small (linear wave), or large (nonlinear waves), compared to the static confining force applied to the chain.

In the first case, we prove the prominent role played by the imperfections of the contacts on the sound celerity. We also show that the pulse damping mainly originates from dry friction.

In the case of very large amplitude, the initial pulse breaks down into a wave train of decreasing amplitudes, with a width comprised between 3 and 4 grains and a supersonic speed. This speed, in units of the bulk sound celerity, depends only on the ratio of the amplitude to the static confining pressure. These observations are interpreted by generalizing the results of Nesterenko.

Finally, we address the case of the two-dimensional packings. Linear sound waves propagate through the static force chains and their velocities increase with the static force in the chain. However they are always smaller than in the one-dimensional case. It suggests that the wave behavior along the force chain is affected by the lateral contacts of the chain.

**Keywords :** Granular medium, transport of waves, nonlinearity, disorder, sound wave, solitary wave, photoelasticity

---